

選修數學

進階
講義

上

中央極限定理

成功高中·陳冠宏老師



信望愛文教基金會

15-3-4 中央極限定理



定理敘述

1. 樣本平均數

若一個母體有 N 個數據，我們由此母體隨機抽樣 n 個樣本點，得到樣本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。

我們定義其樣本平均數 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ ，但每次抽出的 n 個樣本並不相同，故樣本平

均數 $\bar{x}$ 亦不相同。這些樣本平均數為一隨機變數，我們常以 $\bar{X}$ 表示之。

2. 中央極限定理

對一平均為 μ ，變異數為 σ^2 的母群體，不論其是否為常態分配，只要抽樣的樣本數量 n 夠大的時候，則樣本平均數的抽樣分布 $\bar{X}$ ，經標準化得 $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 會趨近於標準常態分

布。



定理證明或說明

➤ 中央極限定理的推廣

對一平均為 μ ，變異數為 σ^2 的母群體，不論其是否為常態分配，只要抽樣的樣本數量 n 夠大的時候，則樣本平均數的抽樣分布 $\bar{X}$ 會趨近平均數為 μ ，變異數為 $\frac{\sigma^2}{n}$ 之常態分布。



關鍵字

中央極限定理



題幹

以下例題 1~例題 4 為題組題，下表為某班 1-10 號的數學小考分數

座號	01	02	03	04	05
分數	80	80	60	70	30
座號	06	07	08	09	10
分數	90	50	60	50	60

例題 1

試求 1-10 號的平均分數

Ans : 63

解：平均 = $\frac{1}{10}(80 + 80 + 60 + 70 + 30 + 90 + 50 + 60 + 50 + 60) = 63$

例題 2

試求

- (1) 1,2 號的平均分數 x_1
- (2) 2,5 號的平均分數 x_2
- (3) 3,6 號的平均分數 x_3
- (4) 7,8 號的平均分數 x_4
- (5) 4,8 號的平均分數 x_5
- (6) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算術平均數

Ans : (1)80 ; (2)55 ; (3)75 ; (4)55 ; (5)65 ; (6)66

解：

$$x_1 = \frac{80 + 80}{2} = 80$$

$$x_2 = \frac{80 + 30}{2} = 55$$

$$x_3 = \frac{60 + 90}{2} = 75$$

$$x_4 = \frac{50 + 60}{2} = 55$$

$$x_5 = \frac{70 + 60}{2} = 65$$

$$\frac{80 + 55 + 75 + 55 + 65}{5} = 66$$

例題 3

試求

- (1) 1, 2, 8, 9 號的平均分數 x_1
- (2) 2, 5, 6, 7 號的平均分數 x_2
- (3) 3, 4, 6, 10 號的平均分數 x_3
- (4) 1, 4, 7, 8 號的平均分數 x_4
- (5) 3, 4, 8, 10 號的平均分數 x_5
- (6) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算術平均數

Ans : (1) 67.5 ; (2) 62.5 ; (3) 70 ; (4) 65 ; (5) 62.5 ; (6) 65.5

解 :

$$x_1 = \frac{80 + 80 + 60 + 50}{4} = 67.5$$

$$x_2 = \frac{80 + 30 + 90 + 50}{4} = 62.5$$

$$x_3 = \frac{60 + 70 + 90 + 60}{4} = 70$$

$$x_4 = \frac{80 + 70 + 50 + 60}{4} = 65$$

$$x_5 = \frac{60 + 70 + 60 + 60}{4} = 62.5$$

$$\frac{67.5 + 62.5 + 70 + 65 + 62.5}{5} = 65.5$$

例題 4

試求

- (1) 1, 2, 4, 8, 9 號的平均分數 x_1
- (2) 2, 5, 6, 7, 10 號的平均分數 x_2
- (3) 3, 4, 6, 8, 10 號的平均分數 x_3
- (4) 1, 4, 5, 7, 8 號的平均分數 x_4
- (5) 3, 4, 5, 8, 10 號的平均分數 x_5
- (6) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算術平均數

Ans : (1) 68 ; (2) 62 ; (3) 68 ; (4) 58 ; (5) 56 ; (6) 62.4

解：

$$x_1 = \frac{80 + 80 + 70 + 60 + 50}{5} = 68$$

$$x_2 = \frac{80 + 30 + 90 + 50 + 60}{5} = 62$$

$$x_3 = \frac{60 + 70 + 90 + 60 + 60}{5} = 68$$

$$x_4 = \frac{80 + 70 + 30 + 50 + 60}{2} = 58$$

$$x_5 = \frac{60 + 70 + 30 + 60 + 60}{2} = 56$$

$$\frac{68 + 62 + 68 + 58 + 56}{5} = 62.4$$

由上述可知，當抽樣的樣本數越大時，樣本平均的平均越接近母體平均。



溫故知新

習題 1

下表為某班 1-10 號的數學小考分數

座號	01	02	03	04	05
分數	50	60	60	70	70
座號	06	07	08	09	10
分數	90	70	30	70	90

(1) 試求 1-10 號的平均分數

(2) 試求

(a) 1,2 號的平均分數 x_1

(b) 2,5 號的平均分數 x_2

(c) 3,6 號的平均分數 x_3

(d) 7,8 號的平均分數 x_4

(e) 4,8 號的平均分數 x_5

(f) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算術平均數

(3) 試求

(a) 1,2,8,9 號的平均分數 x_1

(b) 2, 5, 6, 7 號的平均分數 x_2

(c) 3, 4, 6, 10 號的平均分數 x_3

(d) 1, 4, 7, 8 號的平均分數 x_4

(e) 3, 4, 8, 10 號的平均分數 x_5

(f) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算術平均數

(4) 試求

(a) 1, 2, 4, 8, 9 號的平均分數 x_1

(b) 2, 5, 6, 7, 10 號的平均分數 x_2

(c) 3, 4, 6, 8, 10 號的平均分數 x_3

(d) 1, 4, 5, 7, 8 號的平均分數 x_4

(e) 3, 4, 5, 8, 10 號的平均分數 x_5

(f) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算術平均數

習題 2

【學測 95】

右圖是根據 100 名婦女的體重所作出的直方圖(圖中百分比數字代表各體重區間的相對次數,其中各區間不包含左端點而包含右端點)。該 100 名婦女體重的平均數為 55 公斤,標準差為 12.5 公斤。曲線 N 代表一常態分佈,其平均數與標準差與樣本值相同。在此樣本中,若定義「體重過重」的標準為體重超過樣本平均數 2 個標準差以上(即體重超過 80 公斤以上),則下列敘述哪些正確?

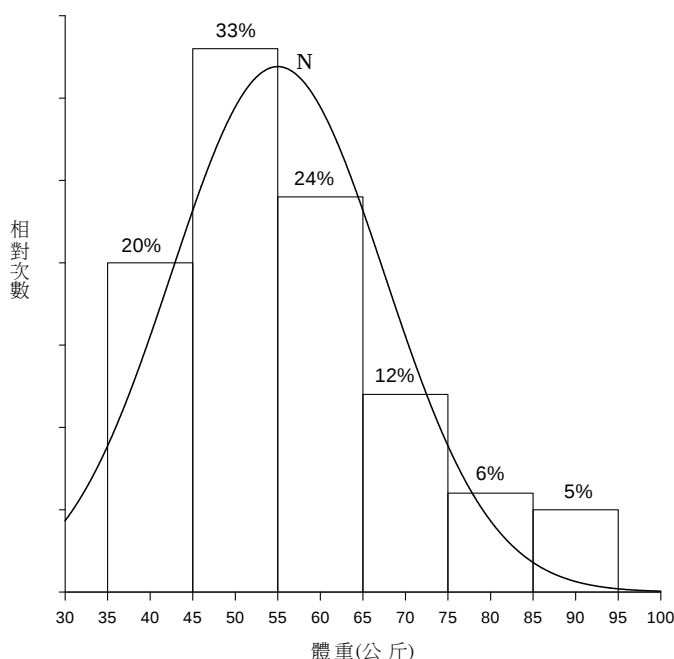
(1) 曲線 N (常態分佈) 中,在 55 公斤以上所佔的比例約為 50%。

(2) 曲線 N (常態分佈) 中,在 80 公斤以上所佔的比例約為 2.5%。

(3) 該樣本中,體重的中位數大於 55 公斤。

(4) 該樣本中,體重的第一四分位數大於 45 公斤。

(5) 該樣本中,「體重過重」(體重超過 80 公斤以上)的比例大於或等於 5%



習題 1 : (1) 平均 66

(2) (a) 55 ; (b) 65 ; (c) 75 ; (d) 50 ; (e) 50 ; (f) 59

(3) (a)52.5 ; (b)72.5 ; (c)77.5 ; (d)55 ; (e)62.5 ; (f)64

(4) (a)56 ; (b)76 ; (c)68 ; (d)58 ; (e)64 ; (f)64.4

習題 2 : (1)(2)(4)(5)

解：

(1)55 公斤處為常態分布曲線最高點，故左右兩邊比例均約為 50%

(2) $80=55+2\times12.5$ ，即平均加上兩個標準差，故超過 80 公斤的比例約有 2.5%

(3)取以下累積 50%左右處，發生在 45~55 這組，故中位數小於 55 公斤

(4)取以下累積 25%左右處，發生在 45~55 這組，故第一四分位數大於 45 公斤

(5)從圖可知，85~90 這組有 5%比例，故大於 80 公斤的比例，大於或等於 5%