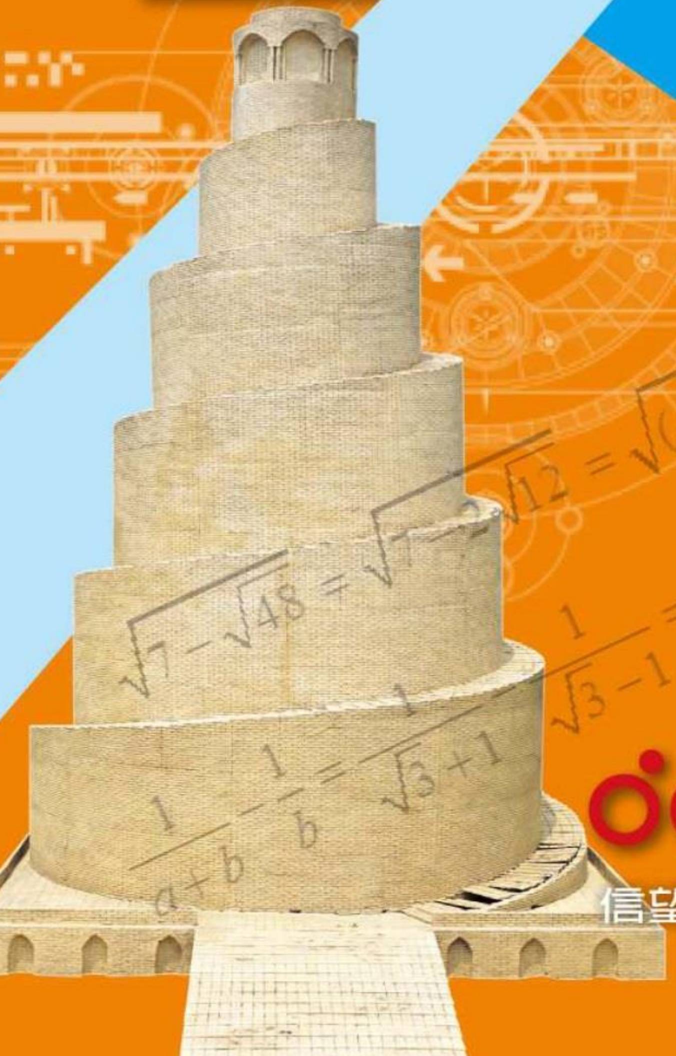
數學 1 進階講義

實係數多項式分解定理

奇次實係數多項式方程式實根定理

景美女中．莊瑋倫老師



信望愛文教基金會

2-3-8　實係數多項式分解定理

2-3-9　奇次實係數多項式方程式實根定理

定理敘述

1. 實係數 $n\ (n \ge 1)$ 次多項式必可分解為一次或二次實係數多項式之乘積。

2. 實係數奇次方程式 $f(x)=0$ 至少有一個實根。

定理證明或說明

由代數基本定理可知，實係數 n 次多項式 $f(x)=0$ 至少一複數根

1. 若此根為實根 a ，則 $f(x)=(x-a)Q(x)$

2. 若此根為虛根 $a+bi$ ，則 $a-bi$ 為方程式另一根，可得：

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x-\left(a+bi\right)\right]\left[x-\left(a-bi\right)\right]Q(x) \\ &= \left[x^2-2ax+\left(a^2+b^2\right)\right]Q(x) \end{aligned}$$

因此， $f(x)$ 可分解為一次或二次實係數多項式之乘積。

注意事項

實係數多項式才有上述定理之特性。

關鍵字

虛根成對、實係數多項方程式。

例題 1

已知 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為實係數多項式

(1)若 $f(2-3i)=-4+5i$ ，求 $f(2+3i)=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

(2)若 $f(-1+6i)=-5$ ，求 $f(-1-6i)=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

Ans：

(1) 設 $z=2-3i$ ，則 $f(z)=-4+5i \Rightarrow a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=-4+5i$

$$f(2+3i)=f(\overline{z})=\overline{f(z)}=-4-5i$$

(2) 同上題：可得 $f(-1-6i)=-5$

例題 2

實係數方程式 $x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b=0$ 有一根 $-1+2i$ ，則 a ， b 之值及另外三根？

Ans：

由題意可知另一根為 $-1-2i$

以 $-1+2i$ 及 $-1-2i$ 為兩根的實係數多項方程式為 $x^2+2x+5=0$

因 x^2+2x+5 為 $x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b$ 的因式，利用長除法計算如下：

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+1+(a-6) \\ \hline
1+2+5 & 1+3+(a+1)+a+b \\
 & 1+2+5 \\ \hline
 & 1+(a-4)+a \\
 & 1+2+5 \\ \hline
 & (a-6)+(a-5)+b \\
 & (a-6)+(2a-12)+(5a-30) \\ \hline
 & 0
\end{array}
\Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases}$$

又因為 $x^4+3x^3+8x^2+7x+5=0$ 可分解為 $(x^2+2x+5)(x^2+x+1)=0$

故， $x=-1\pm 2i$ ， $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

例題 3

設 i 為方程式 $x^3-(3+i)x^2+(2+3i)x-2i=0$ 的一個根，試求其它兩個根。

Ans：

設α、β、i為方程式$x^3-(3+i)x^2+(2+3i)x-2i=0$的三個根，

由根與係數關係可得：

$$\begin{cases}\alpha+\beta+i=3+i\\ \alpha\beta+\beta i+\alpha i=2+3i\\ \alpha\beta i=2i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$$

例題 4

a，b，c，d為實數，已知方程式$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$有四個虛根，

此四根中，其中二根的乘積為$13+i$，另二根的和為$3+4i$，試求a，b的值。

Ans：

設α_1、α_2、β_1、β_2為方程式$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$的四個虛根，

且α_1、β_1互為共軛複數，α_2、β_2互為共軛複數，則

$$\begin{cases}\alpha_1\cdot\alpha_2=13+i\\ \beta_1+\beta_2=3+4i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3-4i\\ \beta_1\cdot\beta_2=13-i\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[x^2-(3-4i)x+(13+i)\right]\left[x^2-(3+4i)x+(13-i)\right]=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-3-4i-3+4i=-6\\ b=13-i+13+i+(3-4i)(3+4i)=51\end{cases}$$

例題 5

試求含有$1-i$及$2+3i$二複數根之最低次實係數多項方程式。

Ans：

由虛根成對定理可知，另二根分別為$1+i$及$2-3i$

因此可得實係數多項方程式為

$$\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2-4x+13\right)=0$$

$$\Rightarrow x^4-6x^3+23x^2-34x+26=0$$

溫故知新

習題 1

已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為實係數多項式，若 $f(2+3i)=4-5i$ 且 $g(3-4i)=4i-2$ ，

試求 $f(2-3i)g(3+4i)=$__________ 。

習題 2

已知 $(2-i)x^2-3(1-i)x-2(1+i)=0$ 有實數解，試求另一虛根為何？

習題 3

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $f(i)=0$ ，

則函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 因 $f(x)$ 的不同而異

習題 4

設 a 是實數，若 $x^2+(3+ai)x-(4-i)=0$ 有一正實根 b ，

則 $a=$__________ ， $b=$__________ 。

習題 5

$x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0$ 有一複數根 $1-i$ ，

試求此方程式之其他根為 __________ 。

習題 6

設 $f(x)$ 為滿足下列條件的最低次實係數多項式： $f(x)$ 最高次項的係數為 1，

且 $3-2i$ 、 i 、 5 皆為方程式 $f(x)=0$ 的解（其中 $i^2=-1$ ）。

則 $f(x)$ 之常數項為 __________ 。　【學測 99】

解答與解析

習題 1：$12-26i$

習題 2：$-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

習題 3：B

習題 4：$a=1$；$b=-1$

習題 5：$1+i$，$1\pm\sqrt{2}$

習題 6：

由實係數方程式虛根成對定理知

$f(x)=0$ 的根有 $3\pm 2i$、$\pm i$、5

因此，滿足條件的最低次多項式為

$$f(x)=[x-(3-2i)][x-(3+2i)](x-i)(x+i)(x-5)$$

故，常數項為 $(-1)^4(3-2i)(3+2i)(i)\ (i)\ (5)=13\times(-1)\times 5=-65$