

選修數學

進階
講義

上

棣美弗定理

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

16-3-3 棣美弗定理



定理敘述

◆ 棣美弗定理

若複數 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ，其中 $n \in \mathbb{Z}$



定理證明或說明

1. 若 $n \in \mathbb{N}$ ，可由數學歸納法證明之

(1) $n=1$ 時， $z^1 = r^1(\cos 1 \cdot \theta + i \sin 1 \cdot \theta)$ 成立

(2) 設 $n=k$ 時， $z^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$

$$\begin{aligned} \text{則 } n=k+1 \text{ 時， } z^{k+1} &= z^k \cdot z = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta) \text{ (依極式的乘法性質)} \end{aligned}$$

故依數學歸納法，若複數 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. 若 $n \in \mathbb{Z}$

(1) 考慮 $n=0$ ， $z^0 = 1 = r^0(\cos 0 \cdot \theta + i \sin 0 \cdot \theta)$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 考慮 } n \in \mathbb{N}, z^{-n} &= \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)} = \frac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)} \\ &= \frac{1}{r^n} \cdot (\cos(0 - n\theta) + i \sin(0 - n\theta)) \text{ (依極式的除法性質)} \\ &= r^{-n}(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)) \end{aligned}$$

故對 $\forall n \in \mathbb{Z}$ ，若複數 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$



關鍵字

棣美弗定理

例題 1

若 n 為自然數，且 $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ 為實數，則 n 的最小值為_____

Ans : 3



解： $(-1+\sqrt{3}i)^n = [2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})]^n = 2^n(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3})$ 為實數

得 n 的最小值為 3

例題 2

$$(-\sqrt{3}+i)^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ans : $512 + 512\sqrt{3}i$

解： $(-\sqrt{3}+i)^{10} = [2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})]^{10} = 2^{10}(\cos\frac{50\pi}{6} + i\sin\frac{50\pi}{6})$
 $= 1024(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 512 + 512\sqrt{3}i$

例題 3

$$(\frac{2}{\sqrt{3}-i})^6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ans : -1

解： $(\frac{2}{\sqrt{3}-i})^6 = [\frac{2}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}]^6 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^6 = \cos(6 \times \frac{\pi}{6}) + i\sin(6 \times \frac{\pi}{6}) = -1$

例題 4

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(1-i)^{16}} = a + bi, \quad a, b \in R \Rightarrow (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ans : $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

解： $\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(1-i)^{16}} = \frac{2^8(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^8}{\sqrt{2}^{16}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^{16}} = \frac{\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}}{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}$
 $= (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 $\Rightarrow (a, b) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

例題 5

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} \Rightarrow z^{30} + \frac{1}{z^{30}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ans : -2

$$\text{解： } z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cos \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{故所求 } z^{30} + \frac{1}{z^{30}} = 2 \cos(30\theta) = -2$$

例題 6

$$\text{設 } \omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}, \text{ 試求 } \omega^{1484} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ans : 1

$$\text{解： } \omega^{1484} = (\omega^7)^{212} = 1$$



溫故知新

習題 1

$$\text{設 } \omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}, \text{ 若 } \omega^n = 1, n \text{ 為大於 } 100 \text{ 之自然數} \Rightarrow n \text{ 最小為 } \underline{\hspace{2cm}}$$

習題 2

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i\right)^6 (3 + \sqrt{3}i)^6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

習題 3

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

習題 4

$$\frac{(\cos 4^\circ + i \sin 4^\circ)^{20} (\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)^5}{(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)^{16}} = a + bi, a, b \in R \Rightarrow (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

習題 5

$$z + \frac{1}{z} = -\sqrt{3} \Rightarrow z^{10} + \frac{1}{z^{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

習題 6

設 $\omega = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$ ，試求 $\omega^{99} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 7

【指考甲 103】

對於正整數 n ，設 $(1+i)^n = a_n + ib_n$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 且 a_n 、 b_n 為實數。試求 $a_4^2 + b_4^2$ 之值。

習題 8

【學測 100】

設 O 、 A 、 B 分別為複數平面上代表 0 、 $1+i$ 、以及 $1-i$ 的點。請問下列哪些選項所對應的點落在 $\triangle OAB$ 的內部？

- (1) $\cos 60^\circ$ (2) $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$ (3) $\frac{4-3i}{5}$ (4) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (5) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25}$



解答與解析

習題 1：105

習題 2：-64

習題 3： $-64\sqrt{3} + 64i$

習題 4： $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

習題 5：1

習題 6： $-i$

習題 7：16

$$\text{解： } a_4 + ib_4 = (1+i)^4 = [\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -4$$

$$\text{所以 } a_4^2 + b_4^2 = 16$$

習題 8 : (1)(3)(5)

解： $1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ ， $1-i = \sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))$

則落在 $\triangle OAB$ 的內部的複數：長度小於 $\sqrt{2}$ ，與 x 軸正向夾角小於 45°

(1) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$ ，在 $\triangle OAB$ 的內部

(2) $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$ ，不在 $\triangle OAB$ 的內部

(3) $\frac{4-3i}{5} \approx \cos(-37^\circ) + i \sin(-37^\circ)$ ，在 $\triangle OAB$ 的內部

(4) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ ，不在 $\triangle OAB$ 的內部

(5) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25} = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$ ，在 $\triangle OAB$ 的內部

故選(1)(3)(5)