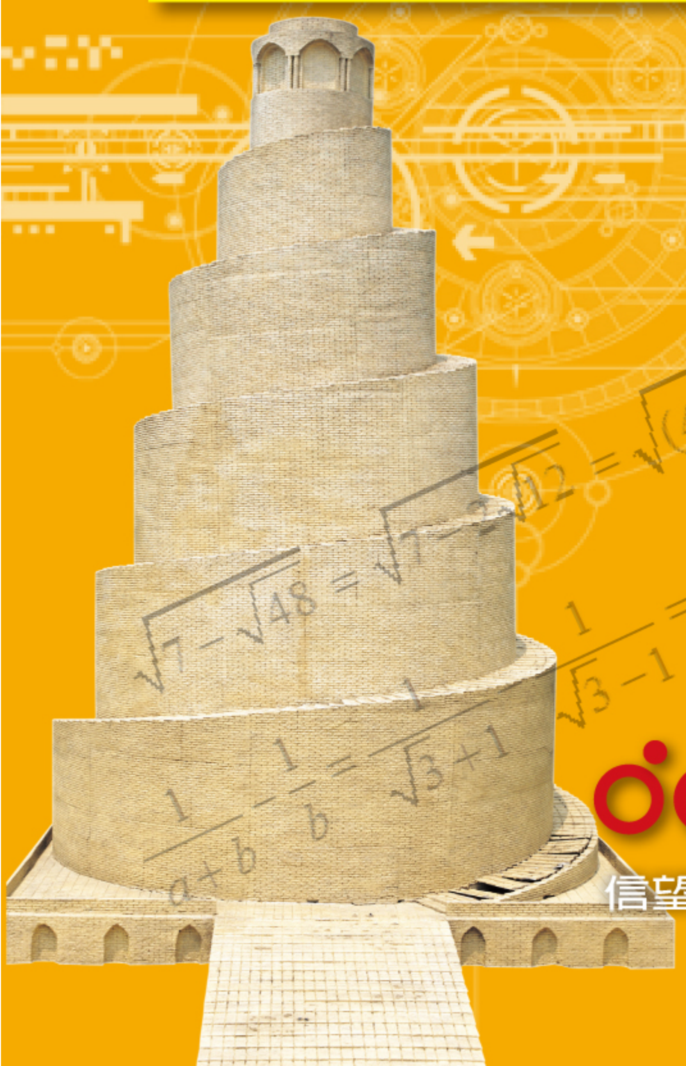
數學 基礎講義

空間中的直線方程式

信望愛文教基金會・數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

空間直線方程式

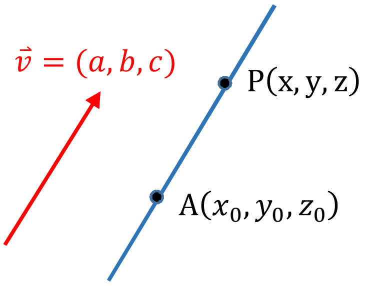
1. 直線方程式

1-1 參數式

i. 設直線L通過點$A(x_0,y_0,z_0)$，且與非零向量$\vec{v}=(a,b,c)$平行，則直線L的參數式為

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt, \quad t\text{為實數} \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

其中，t稱為**參數**，$\vec{v}$稱為直線L的**方向向量**。



ii. 當t變動時，P點的位置就會在直線上滑動。

iii. 由於在直線上選取的點或方向向量的不同，造成參數式的表示法不唯一，但所代表的是同一條直線。

1-2 對稱比例式

i. 由參數式衍生而來

ii. 設直線L通過點$A(x_0,y_0,z_0)$，且與非零向量$\vec{v}=(a,b,c)$平行，
則直線L的對稱比例式為

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

iii. 由於在直線上選取的點或方向向量的不同，造成參數式的表示法不唯一，
但所代表的是同一條直線。

1-3 兩面式

i. 若兩相異平面相交於唯一直線，此種表示法稱為直線的兩面式。

ii. 平面$E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，
平面$E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，且$(a_1,b_1,c_1)$與$(a_2,b_2,c_2)$不平行，
則兩平面相交的直線表示法為

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

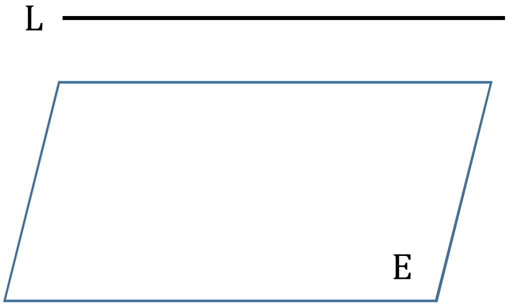
iii. 將上述聯立方程式解出可得到代表此直線的參數式。

2. 直線與平面的關係

將x, y, z參數式分別帶入平面方程式，可得到以下三種結果：

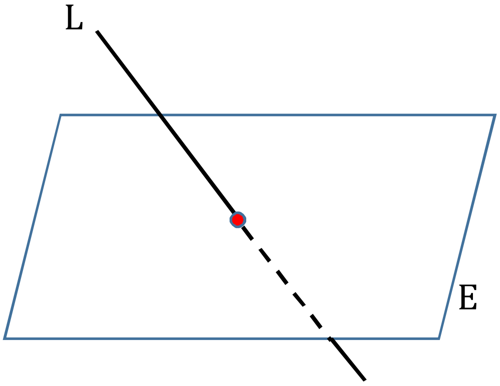
2-1 平行

若沒有任何實數t，可使點P落在平面E上，則直線與平面平行。



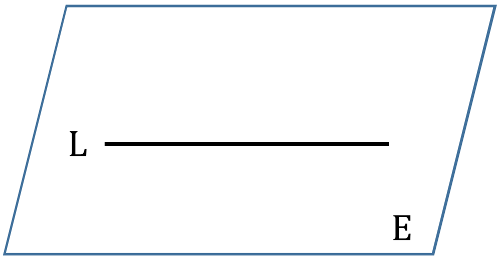
2-2 交於一點

若恰有一個實數t，使點P落在平面E上，則直線與平面交於 一點。



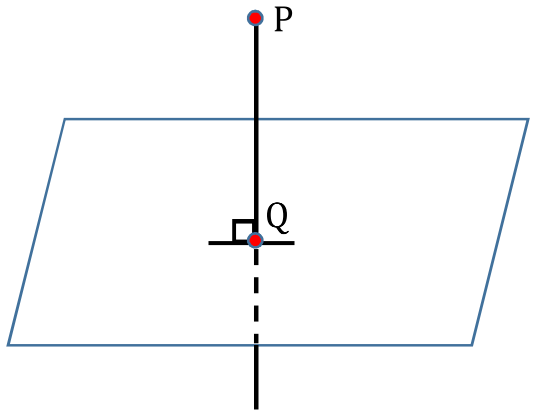
2-3 直線落在平面上

若任意實數t，所得的點P落在平面E上，則直線落在平面上。



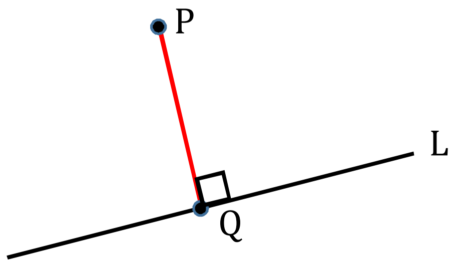
2-4 投影點

若直線L與平面E垂直，也就是說直線方向向量與平面法向量平行，則此交點稱為線外一點P的投影點Q。



3. 點到直線的距離

設P為直線L外已知一點，從點P作直線L的垂線，令垂足為點Q，則點P到直線L的距離為$\overline{PQ}$的長度。

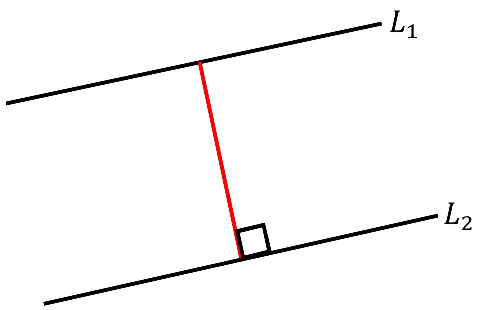


解 1：將直線L參數式寫出來，利用兩向量互相垂直則內積等於0的概念，
可以列出$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{L}=0$，解得t，便能得知Q點，接著使用兩點距離公式。

解 2：一樣寫出參數式，直接利用兩點距離公式，接著使用配方法找出兩點距離的最小值。

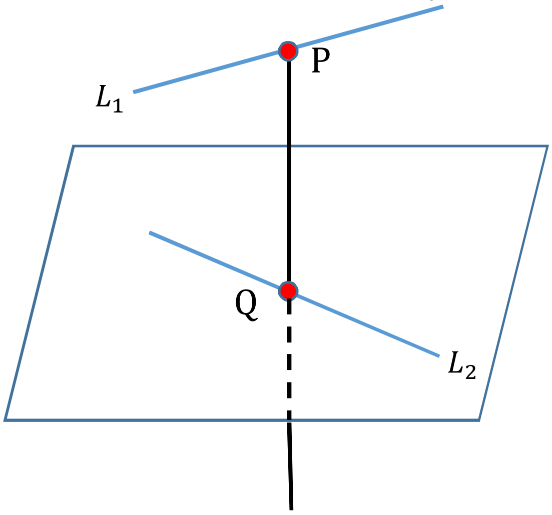
4. 兩平行線的距離

當兩直線L_1, L_2互相平行時，其中一直線上的任意一點到另一條直線的距離都相等，因此利用點到直線的距離概念就能求出兩平行線的距離。



5. 兩歪斜線的距離

當兩條直線L_1, L_2互為歪斜時，在L_1, L_2上分別有一個點P, Q使得$\overline{PQ}$同時垂直於L_1, L_2，此時$\overline{PQ}$稱為L_1, L_2的公垂線段。兩歪斜線的距離即為公垂線段$\overline{PQ}$的長度。



EX：已知直線$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$與$L_2: \frac{x-8}{6} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-2}{-3}$互為歪斜線，兩直線距離如下：

解：

$$L_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in R，L_2: \begin{cases} x = 8 + 6s \\ y = 7 + 2s \\ z = 2 - 3s \end{cases}, s \in R$$

令公垂線L與直線L_1, L_2的交點為P, Q

則可令$\mathrm{P}(1 + \mathrm{t}, 2 + \mathrm{t}, 1 - \mathrm{t})$，$\mathrm{Q}(8 + 6\mathrm{s}, 7 + 2\mathrm{s}, 2 - 3\mathrm{s})$，

$$\overrightarrow{PQ} = (6s - t + 7, 2s - t + 5, -3s + t + 1)$$

由於$\overrightarrow{PQ}$與直線L_1, L_2的方向向量均垂直，因此

$$\begin{cases} (1,1,-1) \cdot (6s - t + 7, 2s - t + 5, -3s + t + 1) = 0 \\ (6,2,-3) \cdot (6s - t + 7, 2s - t + 5, -3s + t + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11s - 3t + 11 = 0 \\ 49s - 11t + 49 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = 0 \end{cases}$$

因此P(1,2,1), Q(2,5,5)，得$\overline{PQ} = \sqrt{26}$

此即為L_1, L_2的距離。

小試身手

1. 已知空間中兩點$A(1,2,3), B(-4,5,6)$，試求直線PQ的參數式及對稱比例式。

2. 將兩面式$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$表式成參數式。

3. 設平面E的方程式為$2x-y+z=1$，請判斷$L: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-3}$與平面$E$的關係。

4. 已知點$P(1,2,3)$與直線$L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$，試求點$P$到直線$L$的投影點。

5. 求兩直線$L_1: x-1=y-2=z+5, L_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=2t \end{cases}$的距離。

詳解

1. $\overrightarrow{AB}=(-5,3,3)$，選擇$A$當固定點(亦可選$B$點)，則

PQ的參數式為$\begin{cases}x=1-5t\\y=2+3t\\z=3+3t\end{cases}$

對稱比例式為$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3}$

2. 設$z=t$，則$\begin{cases}x+y=1-t\\3x-y=3-t\end{cases}$

解出上述方程組，可得$\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t\\y=-\frac{1}{2}t\end{cases}$，再加上一開始假設的$z=t.$

可得$\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t\\y=-\frac{1}{2}t\\z=t\end{cases}$，其中$t$為實數。

3. 平面E的法向量$(2,-1,1)$與直線L的方向向量$(1,-1,-3)$，兩相內積等於零，代表兩向量互相垂直，換句話說平面E與直線L可能平行或重合。

因此將直線上的點代入平面就能判斷兩者的關係。

將點$(2,1,-1)$代入平面E，可得$2\times2-1+(-1)=2\neq1$

代表點不在平面上，因此直線L與平面E平行。

4. 將直線L表示為參數式$\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3+3t\end{cases}$

令$Q(1+2\mathrm{t},-1+\mathrm{t},3+3\mathrm{t})$，則$\overrightarrow{PQ}=(2t,-3+t,3t)$

求點到直線的投影點，因此$\overrightarrow{PQ}$必須與直線L的方向向量垂直

因此，令$(2t,-3+t,3t)\cdot(2,1,3)=0$，解得$t=\frac{9}{17}$

得到投影點$Q(\frac{35}{17},\frac{-8}{17},\frac{78}{17})$

5. 直線L_1的方向向量為$(1,1,1)$，直線L_2的方向向量為$(2,2,2)$

因此兩直線平行。令$\mathrm{P}(1,2,-5)$為L_1上一點，$Q(1+2\mathrm{t},2+\mathrm{t},2\mathrm{t})$為$L_2$上一點，則$\overrightarrow{PQ}=(2t,t,2t+5)$。

令$(2t,t,2t+5)\cdot(1,1,1)=0$，解得$t=-1$

得$Q(-1,1,-2)$，因此$\overline{PQ}=\sqrt{14}$