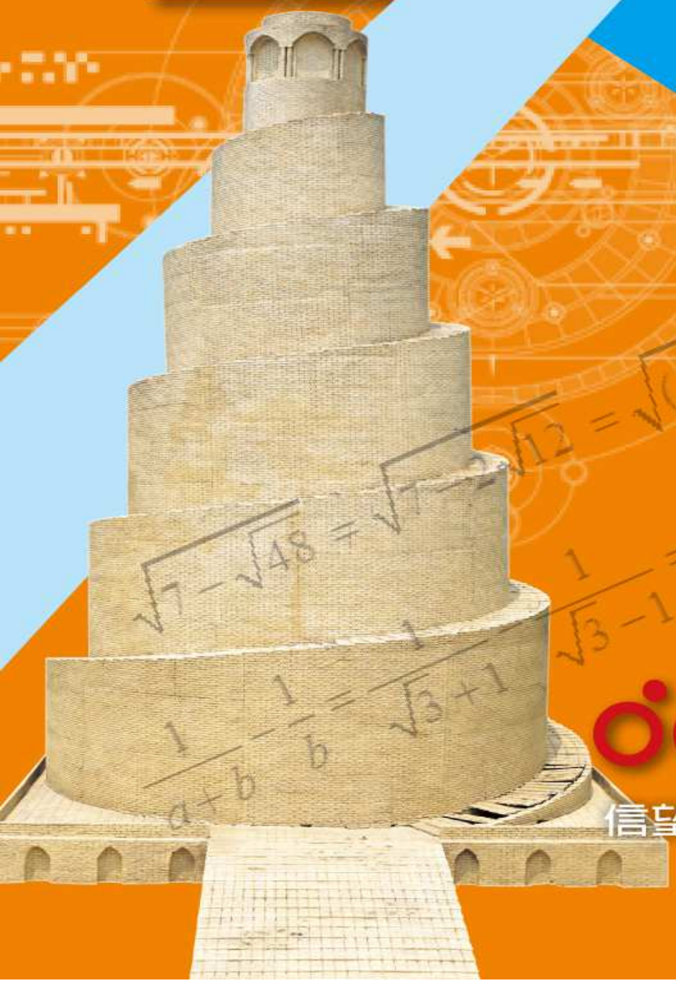
高中數學 進階講義

空間向量的內積

陳清海 老師



信望愛文教基金會

lt99ok413 空間向量的內積

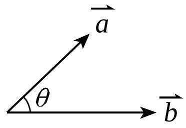
主題一、空間向量的內積

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$為空間中的兩向量，且其夾角為$\theta$，則

(1) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

(2) 夾角θ的餘弦值為

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\ .$$



(3) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

【例題 1】【配合課本例 1】

已知 $\vec{a}=(1,1,2)$ 與 $\vec{b}=(-1,2,1)$，求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ **.** **(2)** $\vec{a}$ **與** $\vec{b}$ **的夾角 .**

Ans：(1) 3，(2) 60°

【詳解】

(1) 利用空間向量內積的坐標表示，

得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+1\times2+2\times1=3$.

(2) 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ .

因為 $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$,

所以 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$.

即 $\theta=60°$.

【類題 1】

已知 ***A*****(1，2，1)，*****B*****(2，3，1)，*****C*****(3，3，3)為空間中三點，求**

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **.** **(2)** $\angle BAC$ **.**

Ans：(1) 3，(2) 45°

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2,1-1)=(1,1,0)$,

$\overrightarrow{AC}=(3-1,3-2,3-1)=(2,1,2)$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1,0)\cdot(2,1,2)=1\times2+1\times1+0\times2=3$.

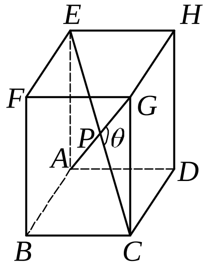
(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$， $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$，

因為 $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times 3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

所以 $\angle BAC=45^\circ$．

【例題 2】【配合課本例 2,3】

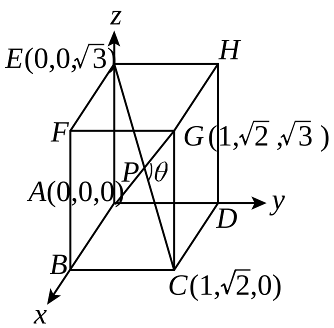
下圖是一個 $\overline{AB}=1$， $\overline{AD}=\sqrt{2}$， $\overline{AE}=\sqrt{3}$ 的長方體，且兩對角線 $\overline{AG}$ 與 $\overline{CE}$ 相交於 P 點．已知 $\angle CPG=\theta$，求 θ 的值．



Ans：90°

【詳解】

將長方體放在坐標空間中，如下圖所示．



因為 θ 是 $\overrightarrow{PC}$ 與 $\overrightarrow{PG}$ 的夾角，又 $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{PC}$， $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{PG}$，

所以 θ 也是 $\overrightarrow{EC}$ 與 $\overrightarrow{AG}$ 的夾角．

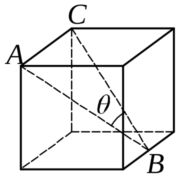
因為 $\overrightarrow{EC}=(1,\sqrt{2},-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{AG}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{AG}|}=\dfrac{1\times 1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}}=0$．

因此 $\theta=90^\circ$．

【類題 2-1】

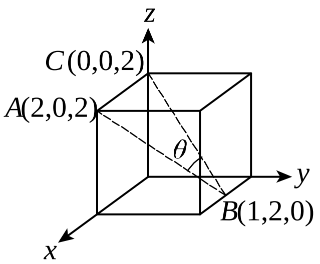
下圖是一個邊長為 2 的正立方體，*A*，*C* 是兩個頂點，*B* 為一個邊的中點．設 $\angle ABC=\theta$，求 $\cos\theta$ 的值．



Ans：$\frac{7}{9}$

【詳解】

將正立方體放在空間坐標中，如下圖所示．



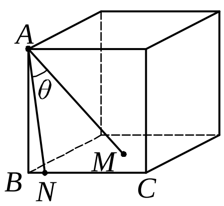
因為 θ 是 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角，且

$\overrightarrow{BA}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,-2,2)$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{7}{3\times3}=\dfrac{7}{9}$．

【類題 2-2】

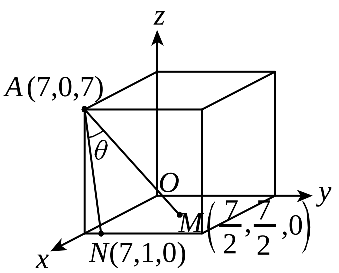
下圖是一個邊長為 7 的正立方體，*M* 為底面的中心，*A*，*B*，*C* 為正立方體的頂點，且 $\overline{BN}=\frac{1}{7}\overline{BC}$．設 $\angle MAN=\theta$，求 θ 的值．



Ans：30°

【詳解】

將正立方體放在空間坐標中，如下圖所示．



因為 θ 是 $\overrightarrow{AM}$ 與 $\overrightarrow{AN}$ 的夾角，且

$\overrightarrow{AM}=(-\frac{7}{2},\frac{7}{2},-7)$， $\overrightarrow{AN}=(0,1,-7)$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $\theta=30°$．

【例題 3】【配合課本例 4】

設 $\overrightarrow{a}=(1,6,2)$，$\overrightarrow{b}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{c}=(-4,2,s)$．

(1) 若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$，則實數 s 的值為何?

(2) 若 $(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，則實數 t 的值為何?

Ans：(1) -4，(2) -1

【詳解】

(1) 因為 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$，所以$(1，6，2)\cdot(-4，2，s)=0$，

即 $1\times(-4)+6\times2+2\times s=0$，
整理得 $8+2s=0$，解得 $s=-4$．

(2) 因為 $(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，且

$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(1,6,2)+t(2,1,-1)=(1+2t,6+t,2-t)$，

所以$(1+2t，6+t，2-t)\cdot(2，1，-1)=0$，

即$(1+2t)\times 2+(6+t)\times 1+(2-t)\times(-1)=0$．

整理得 $6+6t=0$，解得 $t=-1$．

【類題 3】

已知 $\overrightarrow{a}=(3,2,-2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(t,-t,2t+3)$ 垂直，求實數 t 的值．

Ans：-2

【詳解】

因為 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，所以$(3，2，-2)\cdot(t，-t，2t+3)=0$，

即 $3\times t+2\times(-t)+(-2)\times(2t+3)=0$．

整理得 $-3t-6=0$，解得 $t=-2$．

【例題 4】

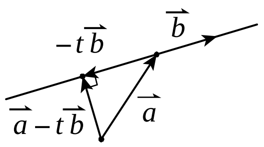
設 $\overrightarrow{a}=(2,0,6)$，$\overrightarrow{b}=(2,1,-3)$，求使得 $|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 有最小值的實數 t，又最小值為何?

Ans：$t=-1$，最小值 $\sqrt{26}$

【詳解】

由下圖可知：

當 $\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直時，$|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 有最小值．



因為 $\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}=(2,0,6)-t(2,1,-3)=(2-2t,-t,6+3t)$，

且 $(\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=(2-2t,-t,6+3t)\cdot(2,1,-3)$

$=(2-2t)\times 2+(-t)\times 1+(6+3t)\times(-3)$

$=-14-14t$，

所以當 $-14-14t=0$ 時，即 $t=-1$ 時，

$|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 有最小值，

且當 $t=-1$ 時，$\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}=(4,1,3,$

故 $|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 的最小值為 $\sqrt{4^2+1^2+3^2}=\sqrt{26}$ ．

【類題 4】

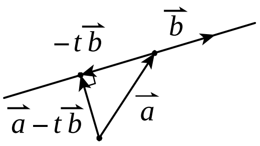
設 $\overrightarrow{a}=(7,0,-2)$，$\overrightarrow{b}=(3,2,2)$，求使得 $|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 有最小值的實數 t，又最小值為何？

Ans：$t=1$，最小值 6

【詳解】

由下圖可知：當 $\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直時，

$|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 有最小值．



因為 $\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}=(7,0,-2)-t(3,2,2)=(7-3t,-2t,-2-2t)$，

且 $(\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=(7-3t,-2t,-2-2t)\cdot(3,2,2)$

$=(7-3t)\times 3+(-2t)\times 2+(-2-2t)\times 2$
$=17-17t$，

所以當 $17-17t=0$ 時，即 $t=1$ 時，$|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 有最小值，

且當 $t=1$ 時，$\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}=(4,-2,-4,$

故 $|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|$ 的最小值為 $\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}=6$ ．

【例題 5】

設 $\overrightarrow{a}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(k,2,-4)$ 為空間中兩向量，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 120°，

求實數 k 的值．

Ans：-2

【詳解】

因為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 120°，所以

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{(2,1,1)\cdot(k,2,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{k^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{2k-2}{\sqrt{6(k^2+20)}},$$

且 $2k-2<0$，即 $k<1$．

將上式兩邊平方，得 $(4k-4)^2=6(k^2+20)$，

整理得 $5k-16k-52=0$，

解得 $k=-2$ 或 $\frac{26}{5}$（不合）．

【類題 5】

設 $\overrightarrow{a}=(1,1,0)$， $\overrightarrow{b}=(2,2,k)$ 為空間中兩向量，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 45°，求實數 k 的值．

Ans： $2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$

【詳解】

因為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 45°，所以

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{(1,1,0)\cdot(2,2,k)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{2^2+2^2+k^2}} = \frac{4}{\sqrt{2(k^2+8)}}.$$

將上式兩邊平方，整理得 $k^2=8$，

解得 $k=2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$．

主題二柯西不等式

1. 對於任意兩向量 $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ ，不等式

$$\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|\le\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$$

恆成立，且等號成立於 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$ 或 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 有一向量為 $\overrightarrow{0}$ 時 .

2. 對於任意實數 x_1， x_2， y_1， y_2， z_1， z_2，不等式

$$\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}\right)\left(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}+z_2^{\ 2}\right)\ge\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)^2$$

恆成立，且等號成立於兩向量 $\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 與 $\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 平行或至少其一為 $\overrightarrow{0}$ 時 .（當 x_2， y_2， z_2 均不為零時，可用 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$ 判別兩向量是否平行 .）

【例題 6】【配合課本例 5】

設實數 x，y，z 滿足 $x-2y+2z=9$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值，並求此時 x，y 與 z 的值．

Ans：最小值 9，$x=1$，$y=-2$，$z=2$

【詳解】

利用柯西不等式，得

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+(-2)^2+2^2)\geqq(x-2y+2z)^2$，

將 $x-2y+2z=9$ 代入，得

$(x^2+y^2+z^2)\cdot 9\ \geqq 9^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geqq 9$，

而且當 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}=t$，即

$x=t$，$y=-2t$，$z=2t$ 時等號才成立．

將其代入 $x-2y+2z=9$，得 $9t=9$，解得 $t=1$．

故當 $x=1$，$y=-2$，$z=2$ 時，

$x^2+y^2+z^2$ 有最小值 9．

【類題 6】

設實數 x，y，z 滿足 $x-2y+2z=3$，求 $x^2+4y^2+4z^2$ 的最小值，並求此時 x，y 與 z 的值．

Ans：最小值 3，$x=1$，$y=-\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{2}$

【詳解】

利用柯西不等式，得

$(x^2+(2y)^2+(2z)^2)(1^2+(-1)^2+1^2)\geqq(x-2y+2z)^2$，

將 $x-2y+2z=3$ 代入，得

$(x^2+4y^2+4z^2)\cdot 3\geqq 3^2$

$\Rightarrow x^2+4y^2+4z^2\geqq 3$，

而且當 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{-1}=\dfrac{2z}{1}=t$，

即 $x=t$，$y=-\dfrac{t}{2}$，$z=\dfrac{t}{2}$ 時等號才成立．

將其代入 $x-2y+2z=3$，得 $3t=3$，解得 $t=1$．

故當 $x=1$， $y=-\frac{1}{2}$， $z=\frac{1}{2}$時，

$x^2+4y^2+4z^2$ 有最小值 3．

【例題 7】【配合課本例 6】

設實數 x，y，z 滿足 $x^2+4y^2+9z^2=36$，求 $x-y-z$ 的最大值與最小值，並分別求有最大值與最小值時，x，y 與 z 的值．

Ans： $x=\frac{36}{7}$， $y=-\frac{9}{7}$， $z=-\frac{4}{7}$， 最大值 7； $x=-\frac{36}{7}$， $y=\frac{9}{7}$， $z=\frac{4}{7}$， 最小值 -7

【詳解】

利用柯西不等式，得

$$(x^2+(2y)^2+(3z)^2)(1^2+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{3})^2)\geq(x-y-z)^2,$$

將 $x^2+4y^2+9z^2=36$ 代入，得

$$36\cdot\frac{49}{36}\geq(x-y-z)^2\Rightarrow -7\leq x-y-z\leq 7,$$

而且當 $\frac{x}{1}=\frac{2y}{-\frac{1}{2}}=\frac{3z}{-\frac{1}{3}}=t$， 即

$x=t$， $y=-\frac{t}{4}$， $z=-\frac{t}{9}$時等號才成立．

將其代入 $x^2+4y^2+9z^2=36$，

整理得 $\frac{49}{36}t^2=36$， 解得 $t=\pm\frac{36}{7}$ ．

故當 $t=\frac{36}{7}$時， $x=\frac{36}{7}$， $y=-\frac{9}{7}$， $z=-\frac{4}{7}$，

此時 $x-y-z$ 有最大值 7；

當 $t=-\frac{36}{7}$時， $x=-\frac{36}{7}$， $y=\frac{9}{7}$， $z=\frac{4}{7}$， 此時 $x-y-z$ 有最小值 -7 ．

【類題 7】

設實數 x，y，z 滿足 $4x^2+4y^2+z^2=16$，求 $x-2y+z$ 的最大值與最小值，並分別求有最大值與最小值時，x，y 與 z 的值．

Ans： $x=\frac{2}{3}$， $y=-\frac{4}{3}$， $z=\frac{8}{3}$， 最大值 6； $x=-\frac{2}{3}$， $y=\frac{4}{3}$， $z=-\frac{8}{3}$， 最小值 -6

【詳解】

利用柯西不等式，得

$((2x)^2+(2y)^2+z^2)((\frac{1}{2})^2+(-1)^2+1^2)\geq(x-2y+z)^2$，

將 $4x^2+4y^2+z^2=16$ 代入，得

$16\cdot\frac{9}{4}\geq(x-2y+z)^2\Rightarrow -6\leq x-2y+z\leq 6$，

而且當 $\frac{2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2y}{-1}=\frac{z}{1}=t$， 即

$x=\frac{t}{4}$， $y=-\frac{t}{2}$， $z=t$ 時等號才成立．

將其代入 $4x^2+4y^2+z^2=16$，

整理得 $\frac{9}{4}t^2=16$， 解得 $t=\pm\frac{8}{3}$ ．

故當 $t=\frac{8}{3}$ 時， $x=\frac{2}{3}$， $y=-\frac{4}{3}$， $z=\frac{8}{3}$，

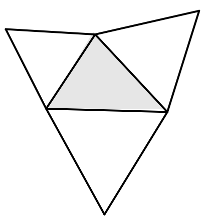
此時 $x-2y+z$ 有最大值 6；

當 $t=-\frac{8}{3}$ 時， $x=-\frac{2}{3}$， $y=\frac{4}{3}$， $z=-\frac{8}{3}$，

此時 $x-2y+z$ 有最小值 -6 ．

【例題 8】【配合課本例 7】

如下圖，由周長 12 之三角形的三邊分別向外作正三角形．問：當此三角形為何種三角形時，三個正三角形的面積和有最小值？又其值是多少？



Ans：正三角形， $12\sqrt{3}$

【詳解】

設三角形的三邊長分別為 x，y，z，

三個正三角形的面積和為 $\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+y^2+z^2)$ ．

根據題意可得 $x+y+z=12$，且 x，y，z 皆為正數．

底下我們討論 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值．

利用柯西不等式，得

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geqq(x+y+z)^2$，

將 $x+y+z=12$ 代入，

整理得 $x^2+y^2+z^2\geq\frac{144}{3}=48$，

而且當 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=t$，即

$x=t$，$y=t$，$z=t$ 時等號才成立．

將其代入 $x+y+z=12$，得 $3t=12$，

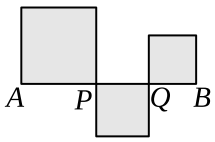
解得 $t=4$，即 $x=y=z=4$．

故當三角形為正三角形時，$x^2+y^2+z^2$ 有最小值 48，

即三個正三角形的面積和有最小值 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 48=12\sqrt{3}$ ．

【類題 8】

設 $\overline{AB}=12$．現將 $\overline{AB}$ 分成 $\overline{AP}$，$\overline{PQ}$ 與 $\overline{QB}$ 三段，並分別以此三段為邊長作正方形，如下圖所示．求此三個正方形面積和的最小值．



Ans：48

【詳解】

設三個正方形的邊長分別為 x，y，z，

三個正方形的面積和為 $x^2+y^2+z^2$ ．

根據題意可得 $x+y+z=12$，且 x，y，z 皆為正數．

利用柯西不等式，得

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geqq(x+y+z)^2$，

將 $x+y+z=12$ 代入，得

$(x^2+y^2+z^2)\cdot 3\ \geqq 12^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geqq 48$，

而且當 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=t$，

即 $x=t$，$y=t$，$z=t$ 時等號才成立．

將其代入 $x+y+z=12$，得 $3t=12$，解得 $t=4$．

故當 $x=4$，$y=4$，$z=4$ 時，

$x^2+y^2+z^2$ 有最小值 48，

|即三個正方形面積和的最小值為 48．

【例題 9】

設三實數 x，y，z 滿足 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-31=0$，求 $2x-y+2z$ 的最大值與最小值，並分別求有最大值或最小值時，x，y 與 z 的值．

Ans：$x=6$，$y=-3$，$z=4$，最大值 23；$x=-2$，$y=1$，$z=-4$，最小值 -13

【詳解】

先將 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-31=0$

配方得 $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=36$．

利用柯西不等式，得

$((x-2)^2+(y+1)^2+z^2)(2^2+(-1)^2+2^2)\geqq(2(x-2)+(-1)(y+1)+2z)^2$，

將 $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=36$ 代入，得

$36\cdot 9\geqq(2x-y+2z-5)^2$

$\Rightarrow -18\leqq 2x-y+2z-5\leqq 18$

$\Rightarrow -13\leqq 2x-y+2z\leqq 23$，

而且當 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}=t$，

即 $x=2+2t$，$y=-1-t$，$z=2t$ 時等號才成立．

將其代入 $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=36$，

整理得 $9t^2=36$，解得 $t=\pm 2$，

即 $(x，y，z)=(6，-3，4)$ 或 $(-2，1，-4)$．

故當 $=6$，$y=-3$，$z=4$ 時，$2x-y+2z$ 有最大值 23；

當 $x=-2$，$y=1$，$z=-4$ 時，$2x-y+2z$ 有最小值 -13．

【類題 9】

設三實數 x，y，z 滿足 $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$，求 $x+2y+2z$ 的最大值與最小值，並分別求有最大值或最小值時，x，y 與 z 的值．

Ans：$x=2$，$y=2$，$z=3$，最大值 12；$x=0$，$y=-2$，$z=-1$，最小值 -6

【詳解】

先將 $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$

配方得$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=9$．

利用柯西不等式，得

$((x-1)^2+y^2+(z-1)^2)(1^2+2^2+2^2)\geqq((x-1)+2y+2(z-1))^2$，

將$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=9$ 代入，得

$9\cdot9\geqq(x+2y+2z-3)^2$

$\Rightarrow -9\leqq x+2y+2z-3\leqq 9$

$\Rightarrow -6\leqq x+2y+2z\leqq 12$，

而且當 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}=t$，

即 $x=1+t$，$y=2t$，$z=1+2t$ 時等號才成立．

將其代入$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=9$，

整理得 $9t^2=9$，解得 $t=\pm1$，

即$(x，y，z)=(2，2，3)$或$(0，-2，-1)$．

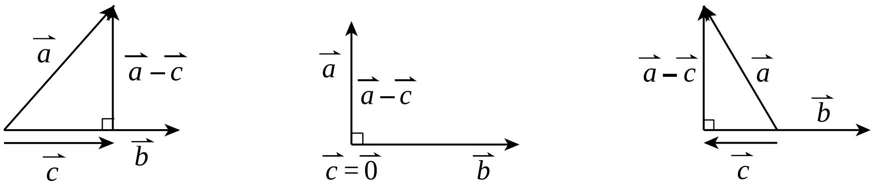
故當 $x=2$，$y=2$，$z=3$ 時，$x+2y+2z$ 有最大值 12；

　當 $x=0$，$y=-2$，$z=-1$ 時，$x+2y+2z$ 有最小值 -6．

主題三、正射影

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$（$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$）是空間中的二個向量，

則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影 $\overrightarrow{c}$ 為 $\overrightarrow{c}=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}$，如下圖所示：



【例題 10】【配合課本例 8】

已知 $\overrightarrow{a}=(3,10,-1)$，$\overrightarrow{b}=(2,1,-2)$，求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影及正射影的長．

Ans：正射影(4，2，−4)，正射影長 6

【詳解】

設 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{c}$ ．

利用正射影公式，得

$$\overrightarrow{c}=(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2})\overrightarrow{b}=(\frac{18}{9})\overrightarrow{b}=2(2,1,-2)=(4,2,-4)\ .$$

正射影的長為 $|\overrightarrow{c}|=\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}=6$ ．

【類題 10】

已知 $\overrightarrow{a}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{b}=(2,3,-6)$，求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影及正射影的長．

Ans：正射影 $(\frac{2}{7},\frac{3}{7},-\frac{6}{7})$，正射影長 1

【詳解】

設 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{c}$ ．

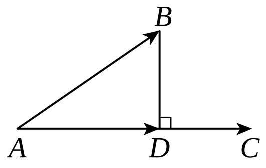
利用正射影公式，得

$$\overrightarrow{c}=(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2})\overrightarrow{b}=(\frac{7}{49})\overrightarrow{b}=\frac{1}{7}(2,3,-6)=(\frac{2}{7},\frac{3}{7},-\frac{6}{7})\ .$$

正射影的長為 $|\overrightarrow{c}|=\sqrt{(\frac{2}{7})^2+(\frac{3}{7})^2+(-\frac{6}{7})^2}=1$ ．

【例題 11】

設 $A(1，1，1)$，$B(8，3，2)$，$C(3，5，-3)$為空間中三點．如果由點 B 作直線 AC 的垂線，與直線 AC 交於 D 點，那麼 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，如下圖所示．求 (1) 正射影 $\overrightarrow{AD}$ ． (2) D 點的坐標．



Ans：(1) (1，2，−2)，(2) (2，3，−1)

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(7,2,1)$， $\overrightarrow{AC}=(2,4,-4)$ ．

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影 $\overrightarrow{AD}$ 為

$$\overrightarrow{AD}=(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}=(\frac{18}{36})\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(2,4,-4)=(1,2,-2)$$ ．

(2) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(1,1,1)+(1,2,-2)=(2,3,-1)$ ．

故 D 點的坐標為 $(2,3,-1)$．

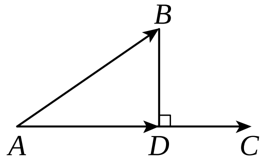
【類題 11】

設 $A(2，3，2)$，$B(7，10，1)$，$C(4，4，1)$為空間中三點．如果由點 B 作直線 AC 的垂線，與直線 AC 交於 D 點，求 D 點的坐標．

Ans：(8，6，−1)

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(5,7,-1)$， $\overrightarrow{AC}=(2,1,-1)$ ．



$\overrightarrow{AB}$在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影 $\overrightarrow{AD}$ 為

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\left(\frac{18}{6}\right)\overrightarrow{AC}=3(2,1,-1)=(6,3,-3)$$.

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(2,3,2)+(6,3,-3)=(8,6,-1)$$.

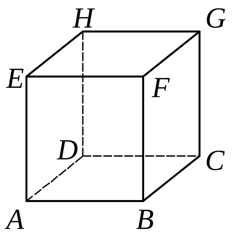
故 D 點的坐標為(8，6，−1) .

重要精選考題

基礎題

1. 下圖是一個正六面體，下列哪些向量和 $\overrightarrow{AD}$ 的內積等於 **0**?

(1) $\overrightarrow{AB}$ **(2)** $\overrightarrow{AC}$ **(3)** $\overrightarrow{AD}$ **(4)** $\overrightarrow{AE}$ **(5)** $\overrightarrow{AF}$ **.**



Ans：(1)(4)(5)

【詳解】

只有和 $\overrightarrow{AD}$ 垂直的向量，和 $\overrightarrow{AD}$ 的內積才等於 0．

由圖可知： $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AE}$， $\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 垂直．

因此正確的選項為(1)(4)(5)．

2. 已知 **$A(3，2，1)$，$B(4，1，1)$，$C(3，3，0)$為空間中三點，求**

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **的值． (2)** $\angle BAC$ **． (3)** $\triangle ABC$ **的面積．**

Ans：(1) – 1，(2) 120°，(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$， $\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$，

因此 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)\cdot(0,1,-1)=-1$．

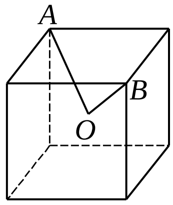
(2) 因為 $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\angle BAC=120°$．

(3) $\triangle ABC$ 的面積為

$\dfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ．

3. **如右圖所示，設一正立方體的中心為 O，而 A，B 為此正立方體同一面上的兩個對頂點，求 $\cos\angle AOB$ 的值．　　【94 指乙】**



Ans：$-\dfrac{1}{3}$

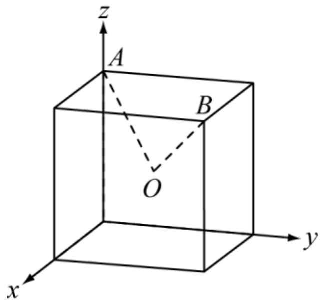
【詳解】

邊長為 2，建立坐標系，

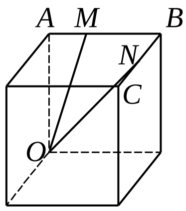
則 $O(1,1,1)$，$A(0,0,2)$，$B(2,2,2)$，

$\overrightarrow{OA}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,1)$，

$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{-1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{3}$ ．



4. **右圖為一正立方體，若 M 在線段 $\overline{AB}$ 上，$\overline{BM}=2\overline{AM}$，$N$ 為線段 $\overline{BC}$ 之中點，則 $\cos\angle MON$ 的值為何？　　【95 學測】**



Ans：$\dfrac{4\sqrt{10}}{15}$

【詳解】

設此正立方體的邊長為 6。建立空間座標系，

O(0，0，0)，A(0，0，6)，M(2，0，6)，N(6，–3，6)，則

$\overrightarrow{OM}=(2，0，6)$，$\overrightarrow{ON}=(6，-3，6)$，

$\cos\angle MON$

$=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|}=\dfrac{2\times6+0\times(-3)+6\times6}{\sqrt{2^2+0^2+6^2}\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2}}=\dfrac{12+36}{2\sqrt{10}\times9}=\dfrac{4}{15}\sqrt{10}$ 。

5. **已知實數 x，y，z 滿足 $2x+y+z=10$，求 $x^2+y^2+z^2+2x$ 的最小值及此時 x，y，z 的值．**

Ans：最小值 23，$x=3$，$y=2$，$z=2$

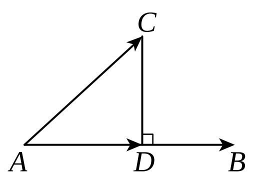
【詳解】
將 $x^2+y^2+z^2+2x$
配方得$(x+1)^2+y^2+z^2-1$．
利用柯西不等式，得
$((x+1)^2+y^2+z^2)(2^2+1^2+1^2)\geqq(2(x+1)+y+z)^2$，
推得 $6((x+1)^2+y^2+z^2)\geqq(2x+y+z+2)^2=12^2$，
即$(x+1)^2+y^2+z^2\geqq 24$．
故 $x^2+y^2+z^2+2x=(x+1)^2+y^2+z^2-1\geqq 23$，
而且當 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=t$， t 為實數，
即 $x=2t-1$，$y=t$，$z=t$ 時，等號才成立．
將其代入 $2x+y+z=10$，
得 $2(2t-1)+t+t=10$，解得 $t=2$．
故當 $x=3$，$y=2$，$z=2$ 時，
$x^2+y^2+z^2+2x$ 有最小值為 23．

6. **設 $A(2，2，0)$，$B(0，2，2)$，$C(2，0，2)$為空間中三點，求**
(1) 點 C 在直線 AB 上的投影點 D．
(2) 點 C 到直線 AB 的距離．

Ans：(1) (1，2，1)，(2) $\sqrt{6}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2,0,2)$， $\overrightarrow{AC}=(0,-2,2)$．



計算 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影 $\overrightarrow{AD}$ 為

$\overrightarrow{AD}=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\overrightarrow{AB}=(\dfrac{4}{8})\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(-2,0,2)=(-1,0,1)$.

設 D 點坐標為 (x,y,z)，

則 $\overrightarrow{AD}=(x-2,y-2,z-0)=(-1,0,1)$

$\Rightarrow x=1$， $y=2$， $z=1$.
故 D 點坐標為(1，2，1) .

(2) 因為點 C 到直線 AB 的距離為 $|\overrightarrow{CD}|$，

又 $\overrightarrow{CD}=(-1,2,-1)$， $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$，

所以點 C 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{6}$.

進階題

7.　空間坐標中，設 A，B，C 三點依序落在 x 軸，y 軸，z 軸的正向上，O 為原點，求 $\angle AOB$ 之角平分線與 $\angle BOC$ 之角平分線的夾角 .

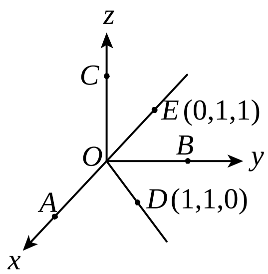
Ans：60°

【詳解】
在 xy 平面上取點 $D(1，1，0)$，
則射線 OD 為 $\angle AOB$ 的角平分線，
同時，在 yz 平面上取點 $E(0，1，1)$，
則射線 OE 為 $\angle BOC$ 的角平分線 .

因為兩向量 $\overrightarrow{OD}$ 與 $\overrightarrow{OE}$ 的夾角 θ 即為兩角平分線的夾角，

所以計算 $\cos\theta=\dfrac{(1,1,0)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

可得 $\theta=60°$，因此兩角平分線的夾角為 60° .



8. **設 $\overrightarrow{a}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(x,y,z)$，若 $|\overrightarrow{b}|=9$，求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最小值及此時 $\overrightarrow{b}$.**

Ans：最小值 -27，$\overrightarrow{b}=(-6,-3,6)$

【詳解】

利用柯西不等式，得 $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$，

即 $|2x+y-2z|\leqq 3\cdot 9$

$\Rightarrow -27\leqq 2x+y-2z\leqq 27$.

因此，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最小值為 -27 .

此時，$\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，即 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}=t$.

設 $x=2t$，$y=t$，$z=-2t$，t 為實數 .

由 $|\overrightarrow{b}|=9$，得 $(2t)^2+t^2+(-2t)^2=9^2$，

解得 $t=\pm 3$.

當 $t=-3$ 時，$2x+y-2z$ 有最小值 -27，

故此時 $\overrightarrow{b}=(-6,-3,6)$.

9. **已知正數 x，y，z 滿足 $x+y+z=10$，**

求 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}$ 的最小值及此時 x，y，z 的值 .

Ans：最小值 $\dfrac{5}{2}$，$x=4$，$y=4$，$z=2$

【詳解】

利用柯西不等式，得

$$((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2)((\frac{2}{\sqrt{x}})^2+(\frac{2}{\sqrt{y}})^2+(\frac{1}{\sqrt{z}})^2)\ge(2+2+1)^2,$$

推得 $(x+y+z)(\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z})\ge 25$，即 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{5}{2}$.

等號成立時，$\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{2}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\dfrac{\sqrt{z}}{\frac{1}{\sqrt{z}}}$，推得 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}=t$.

設 $x=2t$，$y=2t$，$z=t$，t 為實數．

將其代入 $x+y+z=10$，得 $2t+2t+t=10$，解得 $t=2$．

故 $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{1}{z}$ 的最小值為 $\frac{5}{2}$，此時 $x=4$，$y=4$，$z=2$．

10. **設 x，y 為實數，求 $x^2+y^2+(2x-2y-3)^2$ 的最小值．**

Ans：1

【詳解】

設 $2x-2y-3=z$，則 $2x-2y-z=3$．

利用柯西不等式，得

$(x^2+y^2+z^2)(2^2+(-2)^2+(-1)^2)\geqq(2x-2y-z)^2$，

將 $2x-2y-z=3$ 代入，得 $(x^2+y^2+z^2)\cdot 9\geqq 3^2$，

即 $x^2+y^2+z^2\geqq 1$，

而且當 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1}=t$，$t$ 為實數，

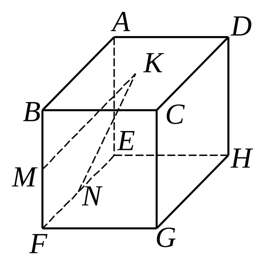
即 $x=2t$，$y=-2t$，$z=-t$ 時等號才成立．

將其代入 $2x-2y-z=3$，解得 $t=\frac{1}{3}$．

故當 $x=\frac{2}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$，$z=-\frac{1}{3}$ 時，

$x^2+y^2+(2x-2y-3)^2$ 有最小值 1．

11. **如右圖所示，正立方體 $ABCD$-$EFGH$ 的稜長等於 2(即 $\overline{AB}=2$)，K 為正方形 $ABCD$ 的中心，M，N 分別為線段 BF，EF 的中點．試問下列哪些選項是正確的?**



(1) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$．

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$．

(3) $\overline{KM}=3$．

(4) $\triangle KMN$ 為一直角三角形．

(5) $\triangle KMN$ 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$．　　　　**【98 學測】**

Ans：(1)(4)

【詳解】

(A) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ 。

(B) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 4=2$ 。

(C) $\overline{KB}=\sqrt{2}$ ，$\overline{KM}=\sqrt{3}$ 。

(D) 以 F 為原點建立空間座標系，

M(0，0，1)，N(0，1，0)，K(1，1，2)，則

$\overrightarrow{MK}=(1，1，1)$，$\overrightarrow{MN}=(0，1，-1)$，

$\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{MN}=0+1-1=0$，故 $\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{MN}$ 。

(E) $|\overrightarrow{MK}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2}$，

故△KMN 之面積為 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。