

# 數學 2

進階  
講義

## 平均數

景美女中 · 莊嘉銘 老師



信望愛文教基金會



$\frac{3}{4}$



## 7-1-1 平均數

### 定理證明或說明

#### 1. 算術平均數( $\bar{X}$ )

$n$  個數值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  時  $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

使用時機：(1) 數據須集中

(2) 各筆統計資料有相同重要性

(A) 未分組情形之推廣

若  $Y_i = aX_i + b$

$$\therefore \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum (ax_i + b)}{n} = \frac{a \sum x_i + nb}{n} = a\bar{X} + b$$

(B) 分組資料：

(1) 算術平均數：若  $d_i = \frac{x_i - A}{h} \Rightarrow \bar{d} = \frac{\bar{x} - A}{h}$

(2)

組別	組中點	次數 $f$	以下累積次數 $C$
$L_1 - U_1$	$x_1$	$f_1$	$C_1 = f_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{i-1} - U_{i-1}$	$x_{i-1}$	$f_{i-1}$	$C_{i-1} = f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1} < \frac{n}{2}$
$L_i - U_i$	$x_i$	$f_i$	$C_i = f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1} + f_i \geq \frac{n}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_k - U_k$	$x_k$	$f_k$	
總計		$n$	

$$\therefore \text{算術平均數 } \bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

## 2. 幾何平均數

正實數  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的幾何平均數  $G$  定為

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \text{ 或 } \log G = \frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n)$$

## 3. 加權平均數

在計算一組資料的平均數時，根據資料的重要性給予不同的權數，所計算出來的結

果即稱之為加權平均數，一般形式的公式為  $\frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}$

其中  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  為賦予變數  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的權數

## 4. 平移

若  $y_i = ax_i + b$ ，其中  $i = 1, 2, \dots, n$

則  $\bar{Y} = a\bar{X} + b$



### 關鍵字

平均數，算術平均數，幾何平均數，加權平均數

### 例題 1

排球隊共有10位隊員，其身高分別為162, 164, 165, 170, 178, 155, 174, 168, 171, 167 (單位：公分)試求其平均身高

Ans :

平均身高為

$$\frac{162 + 164 + 165 + 170 + 178 + 155 + 174 + 168 + 171 + 167}{10} = \frac{1674}{10} = 167.4$$

### 例題 2

下表為某公司 40 名員工的薪資(萬元)次數分配表，求薪資的算術平均數

數值	0~2	2~4	4~6	6~8
次數	7	14	11	8

Ans :

$$\text{這 40 個數的平均為 } \bar{X} = \frac{1 \times 7 + 3 \times 14 + 5 \times 11 + 7 \times 8}{40} = \frac{160}{40} = 4$$

組中點 $x_i$	次數
1	7
3	14
5	11
7	8

### 例題 3

某公司人員的薪水，去年調高 20%，今年調高 40%，則近兩年薪資的年平均成長率為何？  
(已知  $\log 1.2 = 0.0792$ ， $\log 1.4 = 0.1461$ ， $\log 1.297 = 0.1127$ )

Ans :

設前年薪水為  $a$ ，則去年薪水  $1.2a$ ，今年薪水  $1.4 \times 1.2a = 1.68a$

再設此兩年年平均成長率為  $x$ ，則  $a(1+x)^2 = 1.68a$

$$\Rightarrow 2\log(1+x) = \log 1.68 = \log 1.2 + \log 1.4 = 0.2253$$

$$\Rightarrow \log(1+x) = 0.11265 \approx \log 1.297$$

$$\Rightarrow 1+x \approx 1.297$$

$$\Rightarrow x \approx 0.297$$

即年平均成長率約為 29.7%

#### 例題 4

某生第三次月考成績如下表：求其加權平均分數

科目	國文	英文	數學	歷史	地理	公民
分數	80	60	60	80	75	85
每週時數	6	4	4	2	2	2

Ans :

$$\text{所求為} \frac{80 \times 6 + 60 \times 4 + 60 \times 4 + 80 \times 2 + 75 \times 2 + 85 \times 2}{20} = \frac{1440}{20} = 72$$

#### 例題 5

設數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，數據  $Y: y_1, y_2, \dots, y_n$ ，且  $y_i = 100 - 3x_i$ ，已知數據  $X$  的算術平均數為 20，求數據  $Y$  的算術平均數為何？

Ans :

$$\text{因為 } y_i = 100 - 3x_i, \text{ 所以 } \bar{Y} = 100 - 3\bar{X} = 100 - 3 \times 20 = 40$$

#### 例題 6

某校高二  $A$  班 45 人學期成績平均 72 分， $B$  班 36 人學期平均成績 75 分，則  $A, B$  二班之總平均成績為何？

Ans :

$$A, B \text{ 二班的總成績為 } 45 \times 72 + 36 \times 75 = 5940$$

$$\text{所以 } A, B \text{ 二班之總平均為 } \frac{5940}{45 + 36} = \frac{5940}{81} = \frac{220}{3}$$



### 習題 1

九位學生的數學抽考分數分別為30，40，60，50，70，80，60，90，60，求這九位學生數學抽考成績的算術平均數

### 習題 2

某班50人的數學成績，整理如下表：

分數	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80
人數	5	10	10	20	5

求其算術平均數

### 習題 3

某公司4年來的成長率分別為10%，10%，0%，21%，求此公司4年的平均成長率為何？

### 習題 4

下表為甲生的段考五科成績及各科的學分數：

科目	國文	英文	數學	物理	化學
學分	4	5	5	3	3
成績	73	63	82	67	74

試以學分數為權數，計算甲生的加權平均數

### 習題 5

某次段考全班的平均為50分，老師將每人的成績除以2再加50分，求調整後的算術平均數

### 習題 6

張老師有兩班自然組的學生， $A$ 班有40人， $B$ 班有50人，某次月考後， $A$ 班的算術平均數為65分， $B$ 班的算術平均數為60分。今有 $A$ 班兩學生因老師改錯而來改分數，一位少給15分，另一位則多給了5分，試問成績改正後，張老師兩班自然組的學生的算術平均數變化為何？

### 習題 7

【學測 96】

在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將15位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過15分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲15位評審的平均成績為76分，其中三位評審給的成績92、45、55應剔除，則這個參賽者的比賽成績為多少分？

### 習題 8

【學測 92】

根據統計資料，1月份台北地區的平均氣溫是攝氏16度，標準差是攝氏3.5度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度為 $x$ 時，華氏溫度為 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表示，則1月份台北地區的平均氣溫是華氏幾度？(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

### 習題 9

【指考乙 99】

某商店進一批水果，平均單價為每個50元，標準差為10元。今每個水果以進價的1.5倍為售價出售，則水果平均售價為何？



## 解答與解析

習題 1 : 60

【詳解】
$$\bar{X} = \frac{30 + 40 + 50 + 60 \times 3 + 70 + 80 + 90}{9} = \frac{540}{9} = 60$$

習題 2 : 57

【詳解】利用組中點做估計

$$\bar{X} = \frac{35 \times 5 + 45 \times 10 + 55 \times 10 + 65 \times 20 + 75 \times 5}{50} = \frac{2850}{50} = 57$$

習題 3 : 10%

【詳解】平均成長率 = 
$$\sqrt[4]{(1+10\%)(1+10\%)(1+0\%)(1+21\%)} - 1$$
$$= \sqrt[4]{(1.1)^4} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$$

習題 4 : 72

【詳解】加權平均數為 
$$\frac{73 \times 4 + 63 \times 5 + 82 \times 5 + 67 \times 3 + 74 \times 3}{4 + 5 + 5 + 3 + 3} = \frac{1440}{20} = 72$$

習題 5 : 75

【詳解】因為 
$$y_i = x_i \times \frac{1}{2} + 50$$

$$\text{所以 } \bar{Y} = \bar{X} \times \frac{1}{2} + 50 = 50 \times \frac{1}{2} + 50 = 75$$

習題 6 : 增加了  $\frac{1}{9}$  分

【詳解】原平均 =  $\frac{40 \times 65 + 50 \times 60}{40 + 50} = \frac{560}{9}$

新平均 =  $\frac{40 \times 65 + 50 \times 60 + 15 - 5}{40 + 50} = \frac{5610}{90} = \frac{561}{9}$

$\therefore$ 增加了  $\frac{561}{9} - \frac{560}{9} = \frac{1}{9}$

習題 7 : 79分

【詳解】新的成績為  $\frac{76 \times 15 - 92 - 45 - 55}{12} = 79$

習題 8 : 60.8度

【詳解】因為  $y = \frac{9}{5}x + 32$   $\therefore \bar{Y} = \frac{9}{5}\bar{X} + 32 = \frac{9}{5} \times 16 + 32 = 60.8$

習題 9 : 75元

【詳解】因為  $y_i = 1.5x_i$   $\therefore \bar{Y} = 1.5\bar{X} = 1.5 \times 50 = 75$