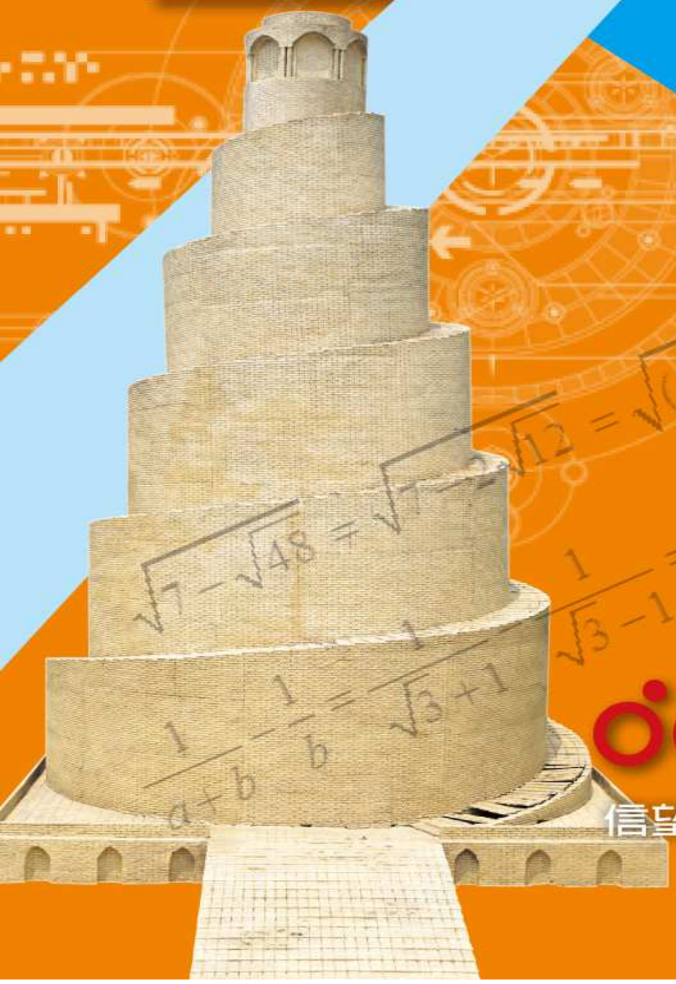
高中數學 進階講義

三元一次聯立方程組

陳清海　老師



信望愛文教基金會

ok423 三元一次聯立方程式

主題一、解聯立方程式

1. 可用加減消去法或代入消去法求解．

2. 聯立方程式的解可分成三種：
   (1) 恰有一解．
   (2) 無限多組解．
   (3) 無解．

【例題 1】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x+3y+4z=29 \\ 3x+2y-z=8 \end{cases}$ **.**

Ans：$x=2$，$y=3$，$z=4$

【詳解】

先將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x+y+z=9 & ① \\ 2x+3y+4z=29 & ② \\ 3x+2y-z=8 & ③ \end{cases}$，

然後採用加減消去法，求解如下：

由②－①×2，③－①×3 消去 x，

得 $\begin{cases} x+y+z=9 & ① \\ y+2z=11 & ④ \\ -y-4z=-19 & ⑤ \end{cases}$，

再由④＋⑤消去 y，

得 $\begin{cases} x+y+z=9 & ① \\ y+2z=11 & ④ \\ -2z=-8 & ⑥ \end{cases}$，

由⑥解得 $z=4$，代回④，解得 $y=3$，

再將 $y=3$，$z=4$ 代回①解得 $x=2$.

【解二】

採用代入消去法：

由①得 $x=9-y-z$，代入②，③消去 x，

得 $\begin{cases} x+y+z=9 & ① \\ y+2z=11 & ④ \\ -y-4z=-19 & ⑤ \end{cases}$，

再由④得 $y=11-2z$，代入⑤消去 y，

得 $\begin{cases} x+y+z=9 & ① \\ y+2z=11 & ④ \\ -2z=-8 & ⑥ \end{cases}$，

由⑥解得 $z=4$，代回④，解得 $y=3$，

再將 $y=3$，$z=4$ 代回①解得 $x=2$.

故聯立方程式的解為 $x=2$，$y=3$，$z=4$.

【類題 1】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-\ \ y+2z=3 \\ 2x+2y+3z=5 \\ 3x+\ \ y+2z=5 \end{cases}$ **.**

Ans：$x=1$，$y=0$，$z=1$

【詳解】

先將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x-\ \ y+2z=3 & ① \\ 2x+2y+3z=5 & ② \\ 3x+\ \ y+2z=5 & ③ \end{cases}$，

然後採用加減消去法，求解如下：

由②－①×2，③－①×3 消去 x，

得 $\begin{cases} x-y+2z=3 & ① \\ 4y-\ \ z=-1 & ④ \\ 4y-4z=-4 & ⑤ \end{cases}$，

再由④－⑤消去 y，

得 $\begin{cases} x-y+2z=3 & ① \\ 4y-\ \ z=-1 & ④ \\ 3z=3 & ⑥ \end{cases}$，

由⑥得 $z=1$，代回④，解得 $y=0$，

再將 $y=0$，$z=1$ 代回①解得 $x=1$.

【例題 2】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ 2x-y+3z=5 \\ 4x+y+7z=10 \end{cases}$ **.**

Ans：無解

【詳解】

先將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x+y+2z=7 & ① \\ 2x-y+3z=5 & ② \\ 4x+y+7z=10 & ③ \end{cases}$，

然後用加減消去法求解如下：

由②－①×2 及③－①×4 消去 x，

得 $\begin{cases} x+\ \ y+2z=7 & ① \\ -3y-\ \ z=-9 & ④ \\ -3y-\ \ z=-18 & ⑤ \end{cases}$，

由⑤－④消去 y，

得 $\begin{cases} x+\ \ y+2z=7 & ① \\ \ -3y-\ \ z=-9 & ④ \\ \qquad\quad 0=-9 & ⑥ \end{cases}$,

因為沒有 x, y, z 滿足⑥式,

所以原聯立方程式無解．

【類題 2】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-2y+\ \ z=0 \\ 3x-\ \ y+2z=3 \\ x-7y+2z=6 \end{cases}$．

Ans：無解

【詳解】

先將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x-2y+\ \ z=0 & ① \\ 3x-\ \ y+2z=3 & ② \\ x-7y+2z=6 & ③ \end{cases}$,

然後用加減消去法求解如下:

由②－①×3 及③－①消去 x,

得 $\begin{cases} x-2y+z=0 & ① \\ \ \ 5y-z=3 & ④ \\ -5y+z=6 & ⑤ \end{cases}$,

由⑤＋④消去 y,

得 $\begin{cases} x-2y+z=0 & ① \\ \ \ 5y-z=3 & ④ \\ \qquad 0=9 & ⑥ \end{cases}$,

因為沒有 x, y, z 滿足⑥式,

所以原聯立方程式無解．

【例題 3】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y+\ \ z=0 \\ x+y+2z=2 \\ 3x+y+5z=4 \end{cases}$．

Ans：$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=t \\ z=2-2t \end{cases}$（$t$ 為實數），即有無限多組解

【詳解】

先將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x-y+\ \ z=0 & ① \\ x+y+2z=2 & ② \\ 3x+y+5z=4 & ③ \end{cases}$，

然後用加減消去法求解如下：

由②－①及③－①×3 消去 x，

得 $\begin{cases} x-y+\ \ z=0 & ① \\ \quad 2y+\ \ z=2 & ④ \\ \quad 4y+2z=4 & ⑤ \end{cases}$，

由⑤－④×2，

得 $\begin{cases} x-\ y+z=0 & ① \\ \quad 2y+z=2 & ④ \\ \qquad\ 0=0 & ⑥ \end{cases}$，即 $\begin{cases} x-\ y+z=0 \\ \quad 2y+z=2 \end{cases}$.

令 $y=t$，代入④，解得 $z=2-2t$，

再將 $y=t$，$z=2-2t$ 代回①，

解得 $x=-2+3t$.

可得聯立方程式的解為 $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=t \\ z=2-2t \end{cases}$ （t 為實數），

即聯立方程式有無限多組解 .

【類題 3】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-\ z=1 \\ x-\ y+2z=4 \\ 4x-\ y+5z=13 \end{cases}$ **.**

Ans： $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ （t 為實數），即有無限多組解

【詳解】

先將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x+2y-\ z=1 & ① \\ x-\ y+2z=4 & ② \\ 4x-\ y+5z=13 & ③ \end{cases}$，

然後用加減消去法求解如下：

由②－①及③－①×4 消去 x，

得 $\begin{cases} x+2y-\ z=1 & ① \\ \ -3y+3z=3 & ④ \\ \ -9y+9z=9 & ⑤ \end{cases}$，

由⑤－④×3，

得 $\begin{cases} x+2y-\ z=1 & ① \\ -3y+3z=3 & ④ \\ 0=0 & ⑥ \end{cases}$，即 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -\ \ y+z=1 \end{cases}$．

令 $y=t$，代入④，解得 $z=1+t$，

再將 $y=t$，$z=1+t$ 代回①，解得 $x=2-t$．

可得聯立方程式的解為 $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ （t 為實數），

即聯立方程式有無限多組解．

【例題 4】

已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形通過(1，3)，(2，8)，(3，15)三點，求 a，b，c 的值．

Ans：$a=1$，$b=2$，$c=0$

【詳解】

因為 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形通過

(1，3)，(2，8)，(3，15)三點，

所以可列得聯立方程式並編號為

$\begin{cases} a+\ b+c=3 & ① \\ 4a+2b+c=8 & ② \\ 9a+3b+c=15 & ③ \end{cases}$，

利用加減消去法，由②－①及③－①消去 c，

得 $\begin{cases} a+\ b+c=3 & ① \\ 3a+\ b\ \ \ \ =5 & ④ \\ 8a+2b\ \ \ \ =12 & ⑤ \end{cases}$，

由④，⑤解得 $a=1$，$b=2$，

再將 $a=1$，$b=2$ 代回①，解得 $c=0$．

故 $a=1$，$b=2$，$c=0$．

【類題 4】

已知圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 通過(−1，−1)，(3，5)，(−2，4)三點，求 d，e，f 的值．

Ans：$d=-2$，$e=-4$，$f=-8$

【詳解】

因為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 通過

$(-1，-1)$，$(3，5)$，$(-2，4)$三點，

所以可列得聯立方程式並編號為

$$\begin{cases} -d-e+f+2=0 & ① \\ 3d+5e+f+34=0 & ② \\ -2d+4e+f+20=0 & ③ \end{cases},$$

利用加減消去法，

由②－①及③－①消去 f，

得 $\begin{cases} -d-e+f+2=0 & ① \\ 4d+6e+32=0 & ④ \\ -d+5e+18=0 & ⑤ \end{cases}$，

由④，⑤解得 $d=-2$，$e=-4$，

再將 $d=-2$，$e=-4$ 代回①，解得 $f=-8$．

故 $d=-2$，$e=-4$，$f=-8$．

【例題 5】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=2 \end{cases}$．

Ans：$x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{3}$

【詳解】

令 $A=\dfrac{1}{x}$，$B=\dfrac{1}{y}$，$C=\dfrac{1}{z}$，

將聯立方程式改寫並編號為 $\begin{cases} A+B+C=6 & ① \\ 2A-B+C=3 & ② \\ A+2B-C=2 & ③ \end{cases}$，

然後利用加減消去法，

解得 $A=1$，$B=2$，$C=3$．

因此 $\dfrac{1}{x}=1$，$\dfrac{1}{y}=2$，$\dfrac{1}{z}=3$，

解得 $x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{3}$．

【類題 5】

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6 \\ \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=2 \\ \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \end{cases}$．

Ans： $x=\dfrac{4}{3}$， $y=\dfrac{1}{2}$， $z=1$

【詳解】

令 $A=\dfrac{1}{x-1}$， $B=\dfrac{1}{y}$， $C=\dfrac{1}{z}$，

將聯立方程式改寫並編號為

$\begin{cases} A+B+C=6 & ① \\ A-2B+3C=2 & ② \\ A-B+2C=3 & ③ \end{cases}$，

然後利用加減消去法，

解得 $A=3$，$B=2$，$C=1$．

因此 $\dfrac{1}{x-1}=3$，$\dfrac{1}{y}=2$，$\dfrac{1}{z}=1$，

解得 $x=\dfrac{4}{3}$， $y=\dfrac{1}{2}$， $z=1$．

主題二、克拉瑪公式：三元一次聯立方程式的公式解

設三元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$．令

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

可得 $\Delta_x=\Delta\cdot x$， $\Delta_y=\Delta\cdot y$， $\Delta_z=\Delta\cdot z$ ．

(1) 當 $\Delta\neq 0$ 時，此聯立方程式恰有一組解

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}\ .$$

我們將上式稱為克拉瑪公式．

(2) 當 $\Delta=0$ 時，若 Δ_x， Δ_y， Δ_z 有非 0 的情形，

則聯立方程式無解．

(3) 當 $\Delta=0$ 時，若 $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，

則聯立方程式無解或無限多組解．

【例題 6】

利用克拉瑪公式，解聯立方程式 $\begin{cases} 2x+\ \ y+2z=1 \\ x+\ \ y-\ z=1 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ **.**

Ans：x＝3， y＝–3， z＝–1

【詳解】

因為

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-6-1+4-(-4)-(-3)-2=2\neq 0$$,

所以此聯立方程式恰有一組解．又因為

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-3+0+4-(-2)-(-3)-0=6$$,

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-6-1+0-0-(-3)-2=-6$$,

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+1+2-4-0-1=-2$$,

所以此聯立方程式恰有一組解

$x=\frac{6}{2}=3$， $y=\frac{-6}{2}=-3$， $z=\frac{-2}{2}=-1$ ．

【類題 6-1】

已知三平面 $3x+2y+z=4$，$x-2y+z=3$，$2x-y+2z=0$ 交於一點，求此交點的坐標．

Ans：$(\frac{9}{2},-2,-\frac{11}{2})$

【詳解】

因為三平面

$3x+2y\ +z=4$，$x-2y+z=3$，$2x-y+2z=0$ 的交點

就是方程組 $\begin{cases} 3x+2y+\ z=4 \\ x-2y+\ z=3 \\ 2x-\ y+2z=0 \end{cases}$

的解，所以利用克拉瑪公式計算如下：

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&1\\2&-1&2\end{vmatrix}=-12+4-1-(-3)-4-(-4)=-6$$
，

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&2&1\\3&-2&1\\0&-1&2\end{vmatrix}=-16+0-3-(-4)-12-0=-27$$
，

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3&4&1\\1&3&1\\2&0&2\end{vmatrix}=18+8+0-0-8-6=12$$
，

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}3&2&4\\1&-2&3\\2&-1&0\end{vmatrix}=0+12-4-(-9)-0-(-16)=33$$
，

得聯立方程式的解為

$x=\dfrac{-27}{-6}=\dfrac{9}{2}$， $y=\dfrac{12}{-6}=-2$， $z=\dfrac{33}{-6}=-\dfrac{11}{2}$ ．

故三平面的交點為 $(\dfrac{9}{2},-2,-\dfrac{11}{2})$ ．

【類題 6-2】

已知三平面 $x+3y+2z=2,\ \ 3x-y+2z=1,\ \ 2x+2y-z=-2$ 交於點$(a，b，c)$，求 a 的值．

Ans： $-\dfrac{15}{34}$

【詳解】

由克拉瑪公式可知： $a=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$， 並計算如下：

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&2\\3&-1&2\\2&2&-1\end{vmatrix}=1+12+12-4-(-9)-(-4)=34,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&-1&2\\-2&2&-1\end{vmatrix}=2-12+4-8-(-3)-4=-15,$$

故 $a=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=-\dfrac{15}{34}$ ．

【例題】

已知聯立方程式 $\begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z=1 \\ \ \ x+\ \ y+2z=2 \\ ax+2y+\ \ z=b \end{cases}$ **有無限多組解，求 a，b 的值．**

Ans：$a=-7$，$b=-5$

【詳解】

因為聯立方程式有無限多組解，所以

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $2-2a-2-8-(-1)-(-a)=0$，

整理得 $-a-7=0$，解得 $a=-7$．

現在將聯立方程式編號為 $\begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z=1 & ① \\ \ \ x+\ \ y+2z=2 & ② \\ -7x+2y+\ \ z=b & ③ \end{cases}$，

利用加減消去法，由①－②×2 及③＋②×7，

得 $\begin{cases} -3y-\ \ 5z=-3 & ④ \\ x+\ \ y+\ \ 2z=2 & ② \\ 9y+15z=b+14 & ⑤ \end{cases}$，

再由⑤＋④×3 消去 y，

得 $\begin{cases} -3y-5z=-3 & ④ \\ x+\ \ y+2z=2 & ② \\ 0=b+5 & ⑥ \end{cases}$．

因為聯立方程式有無限多組解，

所以⑥式為 $0=0$ 的形式，即 $b=-5$．

故由上面的討論可得：$a=-7$，$b=-5$．

【類題 7】

已知聯立方程式 $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 3x+\ \ y+z=1 \\ ax-3y-z=4 \end{cases}$ **無解，求 a 的值．**

Ans：5

【詳解】

因為聯立方程式無解，所以 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ a & -3 & -1 \end{vmatrix}=0$，

即 $-1-2a+9-(-3)-6-(-a)=0$，

整理得 $-a+5=0$，解得 $a=5$．

【例題 8】

甲、乙兩家共用一口井．用甲家繩子 1 條，乙家繩子 4 條連結起來取水，正好到達水面；用甲家繩子 3 條，乙家繩子 1 條連結起來取水，距水面還有 3 尺；用甲家繩子 2 條，乙家繩子 2 條連結起來取水，離水面還有 6 尺．只知甲家繩子均等長，乙家繩子也均等長，問井深及甲、乙兩家的繩子各幾尺長？

Ans：井深 48 尺，甲家繩長 12 尺，乙家繩長 9 尺

【詳解】

設井深 x 尺，甲家繩子長 y 尺，乙家繩子長 z 尺．

由題意可列得三元一次聯立方程式

$\begin{cases} x = y+4z \\ x-3=3y+z \\ x-6=2y+2z \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} x-y-4z=0 \\ x-3y-z=3 \\ x-2y-2z=6 \end{cases}$．因為

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=6+1+8-2-2-12=-1,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0+6+24-0-6-72=-48,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}=-6+0-24-(-6)-0-(-12)=-12,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}=-18-3+0-(-6)-(-6)-0=-9,$$

所以此聯立方程式的解為

$$x=\frac{-48}{-1}=48,\quad y=\frac{-12}{-1}=12,\quad z=\frac{-9}{-1}=9\ .$$

故井深 48 尺，甲家繩長 12 尺，乙家繩長 9 尺．

【類題 8】

麵粉批發：低筋麵粉一斤、中筋麵粉三斤、高筋麵粉二斤，
售價 215 元；低筋麵粉二斤、中筋麵粉一斤、高筋麵粉三斤，
售價也是 215 元；低筋麵粉三斤、中筋麵粉二斤、高筋麵粉一斤，
售價則為 200 元．問：低筋、中筋、高筋麵粉一斤各售多少元？

Ans：低筋 30 元，中筋 35 元，高筋 40 元

【詳解】

設低筋麵粉一斤 x 元、中筋麵粉一斤 y 元、高筋麵粉一斤 z 元．

由題意可列得聯立方程式並編號為

$$\begin{cases} x+3y+2z=215 & ① \\ 2x+y+3z=215 & ② \\ 3x+2y+z=200 & ③ \end{cases}.$$

利用加減消去法，由②－①×2 及③－①×3，

$$\text{得}\begin{cases} x+3y+2z=215 & ① \\ -5y-z=-215 & ④ \\ -7y-5z=-445 & ⑤ \end{cases},$$

由④，⑤解得 $y=35$，$z=40$，

再將 $y=35$，$z=40$ 代回①，解得 $x=30$．

故低筋麵粉一斤 30 元，中筋麵粉一斤 35 元，高筋麵粉一斤 40 元．

【例題 9】

饅頭店特賣炭烤小饅頭，每天中午 12 點時出爐，限量 100 個，
每位顧客最多只能買 3 個；購買 1 個、2 個或 3 個小饅頭的價錢
分別為 6、11、15 元．已知今天小饅頭銷售一空，買饅頭的顧客
共有 50 位，總共賣得 531 元，問購買 1 個、2 個或 3 個小饅頭的
顧客各多少人?

Ans：19 人，12 人，19 人

【詳解】

設購買 1 個、2 個或 3 個小饅頭的顧客人數
分別為 x，y，z 人．

由題意可列得聯立方程式並編號為

$$\begin{cases} x+y+z=50 & ① \\ x+2y+3z=100 & ② \\ 6x+11y+15z=531 & ③ \end{cases}.$$

利用加減消去法，由②－①及③－①×6，得

$$\begin{cases} x+\ y+\ \ z=50 & ① \\ \quad\ y+2z=50 & ④ \\ \ 5y+9z=231 & ⑤ \end{cases},$$

再將⑤－④×5 相加得 $-z=-19$，即 $z=19$，

並可推得 $y=12$，$x=19$．

故購買 1 個、2 個或 3 個小饅頭的顧客人數

分別為 19，12，19 人．

【類題 9】

相傳包子是三國時白羅家族發明的．孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買得到．事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別是 8、15、21 分錢．在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆跟老闆娘有如下的對話：老闆說:「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢?」，老闆娘說:「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子．」

(1) **請問當天白羅包子店淨賺多少錢?**

(2) **聰明的你，請幫忙分析當天購買一個、兩個及三個包子的人數各多少人?**

Ans：(1) 2200 分錢，(2) 95 人，107 人，230 人

【詳解】

(1) $7195-999\cdot5=2200$ 分錢．

(2) 設購買 1 個、2 個或 3 個包子的人數分別為 x，y，z 人．

由題意可列得聯立方程式並編號為

$$\begin{cases} x+\ y+\ \ z=432 & ① \\ x+2y+\ 3z=999 & ② \\ 8x+15y+21z=7195 & ③ \end{cases},$$

利用加減消去法，由②－①及③－①×8，得

$$\begin{cases} x+\ y+\ \ z=432 & ① \\ \quad\ y+\ 2z=567 & ④ \\ \ 7y+13z=3739 & ⑤ \end{cases},$$

再將⑤－④×7 得 $-z=-230$，即 $z=230$，

並可推得 $y=107$，$x=95$．

故購買 1 個、2 個或 3 個包子的人數

分別為 95，107，230 人．

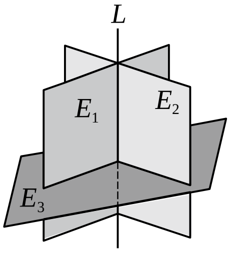
主題三、三平面幾何關係的代數判定

三元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$之解的幾何意義為三平面

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$的共同交點．

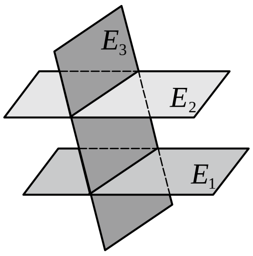
(1) 當$\Delta\neq 0$時，此聯立方程式恰有一組解

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}, z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$，三平面恰交於一點，如右圖所示．

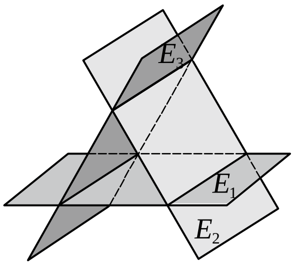


三平面恰交於一點

(2) 當$\Delta=0$，且$\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$有非 0 的情形時，三平面的關係有下圖 2 種情形：

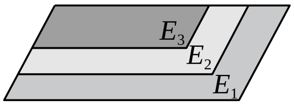


二平面平行且與第三平面分別交於一直線

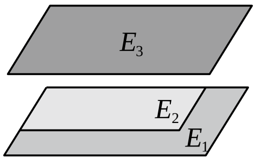


三平面兩兩交於一直線但沒有共同交點

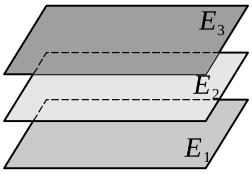
(3) 當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$時，三平面的關係有下圖 5 種情形：



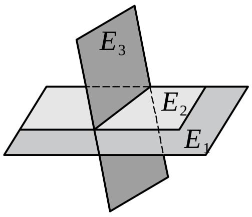
三平面重合



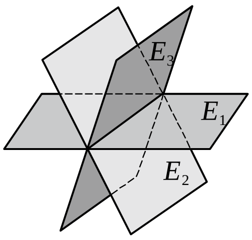
二平面重合且與第三平面平行



三平面平行



二平面重合且與第三平面交於一直線



平面兩兩不重合且相交於一直線

三元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$的解與幾何關係有以下的結論：

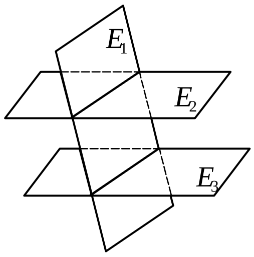
	聯立方程式的解	幾何關係
$\Delta \neq 0$	恰有一解	三平面恰交於一點
$\Delta = 0$, $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$有非 0 的情形	無解	三平面沒有共同交點
$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$	無解	三平面沒有共同交點
	無限多組解	三平面交於一直線或一平面

【例題 10】

判定三平面 E_1：$x+2y+3z=4$，E_2：$2x+3y+z=5$，
E_3：$4x+6y+2z=6$ 的相交情形．

Ans：E_2 與 E_3 平行，且與 E_1 分別交於一直線

【詳解】
因為 E_2 的法向量$(2，3，1)$與 E_3 的法向量$(4，6，2)$平行，
且二平面相異，所以 E_2 與 E_3 互相平行．
又因為 E_1 的法向量$(1，2，3)$和二平面的法向量不平行，
所以 E_1 和 E_2 與 E_3 二平面分別交於一直線．
三平面相交的情形如下圖所示．

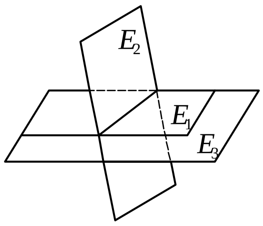


【類題 10】

判定三平面 E_1：$x-y+2z=4$，E_2：$2x-2y-2z=5$，
E_3：$2x-2y+4z=8$ 的相交情形．

Ans：E_1 與 E_3 重合，且與 E_2 交於一直線

【詳解】
因為 E_3 的方程式可以改寫成 E_1：$x-y+2z=4$，
即 E_1 與 E_3 是兩個重合平面．
又因為 E_2 的法向量$(2，-2，-2)$和二平面的法向量不平行，
所以 E_2 和 E_1 與 E_3 二平面同時交於一直線．
三平面相交的情形如下圖所示．



【例題 11】

判定三平面 E_1：$x+y-2z=3$，E_2：$2x-y+z=1$，
E_3：$x+4y-7z=8$ 的相交情形．

Ans：三平面兩兩不重合，且相交於一直線

【詳解】

因為三平面 E_1，E_2，E_3 的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{n_3}=(1,4,-7)$

均不互相平行，所以此三平面的相交情形只有 3 種．
因此我們只需求出三平面的交點個數，
就可以判定它們的相交情形是 3 種情形中的哪一種．
現在將三平面的方程式聯立起來並編號為

$$\begin{cases} x+y-2z=3 & ① \\ 2x-y+z=1 & ② \\ x+4y-7z=8 & ③ \end{cases},$$

利用加減消去法，
由② − ①×2 及③ − ①消去 x，得

$$\begin{cases} x+y-2z=3 & ① \\ -3y+5z=-5 & ④ \\ 3y-5z=5 & ⑤ \end{cases},$$

再由⑤ + ④消去 y，得

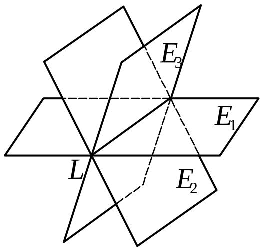
$$\begin{cases} x+y-2z=3 & ① \\ -3y+5z=-5 & ④ \\ 0=0 & ⑥ \end{cases},$$

即 $\begin{cases} x+y-2z=3 & ① \\ -3y+5z=-5 & ④ \end{cases}$．

令 $y=5t$，代入④，解得 $z=-1+3t$，
再將 $y=5t$，$z=-1+3t$ 代回①，解得 $x=1+t$．
可得聯立方程式有無限多組解，

其解為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=5t \\ z=-1+3t \end{cases}$ （t 為實數）．

因此在幾何上，此三平面兩兩不重合，且相交於一直線 L，
如下圖所示．



【類題 11】

判定三平面 E_1：$x+2y-3z=1$，E_2：$x+y-2z=2$，E_3：$x+4y-5z=8$ 的相交情形．

Ans：三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點

【詳解】

因為三平面 E_1，E_2，E_3 的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(1,2,-3)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{n_3}=(1,4,-5)$

均不互相平行，所以此三平面的相交情形只有 3 種．

現在將三平面的方程式聯立起來並編號為

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 & ① \\ x+\ \ y-2z=2 & ② \\ x+4y-5z=8 & ③ \end{cases},$$

利用加減消去法，由②－①及③－①消去 x，得

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 & ① \\ \quad -y+\ z=1 & ④ \\ \quad 2y-2z=7 & ⑤ \end{cases},$$

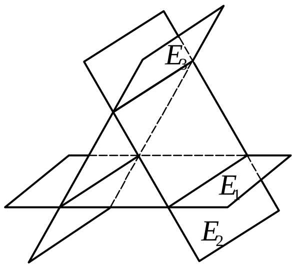
再由⑤＋④×2 消去 y，得

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 & ① \\ \quad -y+\ z=1 & ④ \\ \qquad\quad 0=9 & ⑥ \end{cases}.$$

因為沒有 x，y，z 滿足⑥式，所以聯立方程式無解．

因此在幾何上，此三平面兩兩交於一直線，

但沒有共同交點，如下圖所示．



【例題 12】

試就實數 a 的值，判定三平面 E_1：$x-y+z=1$，
E_2：$3x+2y-z=-2$，E_3：$x+4y-3z=a$ 的相交情形．

Ans：$a=-4$ 時，三平面兩兩不重合，且相交於一直線，$a\neq-4$ 時，三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點

【詳解】

因為三平面 E_1，E_2，E_3 的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{n_2}=(3,2,-1)$，$\overrightarrow{n_3}=(1,4,-3)$

均不互相平行，所以此三平面的相交情形只有 3 種．

現在將三平面的方程式聯立起來並編號為

$$\begin{cases} x-y+z=1 & ① \\ 3x+2y-z=-2 & ② \\ x+4y-3z=a & ③ \end{cases},$$

利用加減消去法，由②－①×3 及③－①消去 x，得

$$\begin{cases} x-y+z=1 & ① \\ 5y-4z=-5 & ④ \\ 5y-4z=a-1 & ⑤ \end{cases},$$

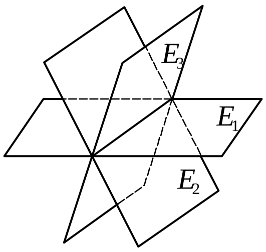
再由⑤－④，得 $\begin{cases} x-y+z=1 & ① \\ 5y-4z=-5 & ④ \\ 0=a+4 & ⑥ \end{cases}$，

即 $\begin{cases} x-y+z=1 & ① \\ 5y-4z=-5 & ④ \\ a=-4 & ⑦ \end{cases}$．

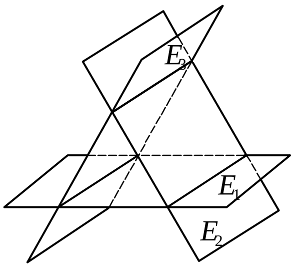
(1) 當 $a=-4$ 時，令 $z=5t$，代入④，解得 $y=-1+4t$，
再將 $y=-1+4t$，$z=5t$ 代回①，解得 $x=-t$．

可得聯立方程式有無限多組解，其解為 $\begin{cases} x=-t \\ y=-1+4t \\ z=5t \end{cases}$（$t$ 為實數）．

因此當 $a=-4$ 時，三平面兩兩不重合，且相交於一直線，
如下圖所示．



(2) 當 $a\neq-4$ 時，因為沒有 x，y，z 滿足⑦式，所以原聯立方程式無解．
因此當 $a\neq-4$ 時，三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點，
如下圖所示．



【類題 12】

下列哪個 a 的值，使得平面 E_1：$x-2y+z=1$，E_2：$2x-3y-z=2$，E_3：$x-3y+az=4$ 兩兩相交於一直線，但沒有共同的交點？
(1) $a=1$，(2) $a=2$，(3) $a=3$，(4) $a=4$，(5) $a=5$．

Ans：(4)

【詳解】

因為三平面 E_1，E_2，E_3 的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,-3,-1)$，$\overrightarrow{n_3}=(1,-3,a)$

均不互相平行，
所以將三平面的方程式聯立起來並編號為

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & ① \\ 2x-3y-z=2 & ② \\ x-3y+az=4 & ③ \end{cases},$$

因為三平面兩兩相交於一直線，
但沒有共同的交點，所以方程組無解．
利用加減消去法，由②－①×2 及③－①消去 x，得

$$\begin{cases} x-2y+ \qquad z=1 & ① \\ \qquad y- \quad 3z=0 & ④ \\ -\ y+(a-1)z=3 & ⑤ \end{cases},$$

再由⑤＋④消去 y，得

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & ① \\ \quad y-3z=0 & ④ \\ (a-4)z=3 & ⑥ \end{cases}.$$

因為當 $a-4=0$，即 $a=4$ 時，⑥式為 $0=3$，

表示聯立方程式無解．

故正確的選項為(4)．

【解二】

因為三平面兩兩相交於一直線，但沒有共同的交點，

表示將三平面的方程式聯立起來的聯立方程式

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-3y-z=2 \\ x-3y+az=4 \end{cases}$$ 無解，所以 $\Delta=0$ ．

計算 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix}=-3a+2-6-3-(4)-(3)a-$ ．

由 $a-4=0$，解得 $a=4$ ．

故正確的選項為(4)．

【例題 13】

已知聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=ax \\ x+y+z=ay \\ x+y+z=az \end{cases}$ 除了 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 的解之外，尚有其他解．

(1) 求 a 的值．

(2) 就 a 值討論聯立方程式的幾何意義．

Ans：(1) 0 或 3，

(2) $a=0$ 時，三平面重合；$a=3$ 時，三平面兩兩不重合，且相交於一直線

【詳解】

將 $\begin{cases} x+y+z=ax \\ x+y+z=ay \\ x+y+z=az \end{cases}$ 改成 $\begin{cases} (1-a)x+y+z=0 \\ x+(1-a)y+z=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$,

因為除了 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 的解之外，尚有其他解，

所以 $\Delta=0$，即 $\begin{vmatrix}1-a & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1\\ 1 & 1 & 1-a\end{vmatrix}=0$．

(1) 計算 $\begin{vmatrix}1-a & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1\\ 1 & 1 & 1-a\end{vmatrix}=a^2(3-a)$，

因此 $a^2(3-a)=0$，解得 $a=0$ 或 3．

(2) 當 $a=0$ 時，聯立方程式為

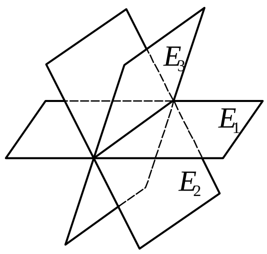
$\begin{cases}x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，表示三個重合的平面．

當 $a=3$ 時，聯立方程式為 $\begin{cases}-2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}$，

表示三個兩兩不平行的平面．

因為聯立方程式有無限多組解，

所以此三平面相交於一直線，如下圖所示．



【類題 13】

就 a 值討論聯立方程式 $\begin{cases}ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{cases}$ **的幾何意義．**

Ans：$a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 時，三平面交於一點$\left(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)$；$a=1$ 時，三平面重合；$a=-2$ 時，三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點

【詳解】

計算 $\Delta=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2)$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a-1)^2$，

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^2.$$

(1) 當 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$，即 $\Delta\neq0$ 時，

聯立方程式恰有一解 $(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})$，

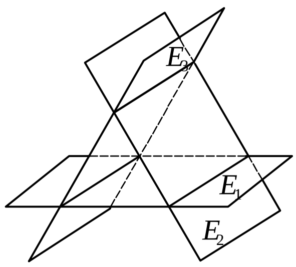
即三平面交於一點 $(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})$.

(2) 當 $a=1$ 時，聯立方程式為 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，

表示三個重合平面 .

(3) 當 $a=-2$ 時，聯立方程式為 $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$，

因為 $\Delta_x=(a-1)^2=9\neq0$，所以聯立方程式無解，
表示三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點，
如下圖所示 .



重要精選考題

基礎題

1. **判定三平面 E_1：$x+2y+3z=1$，E_2：$2x+3y+4z=2$，E_3：$3x+5y+7z=3$ 的相交情形．**

Ans：三平面兩兩不重合，且相交於一直線

【詳解】

因為三平面 E_1，E_2，E_3 的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,3,4)$，$\overrightarrow{n_3}=(3,5,7)$

均不互相平行，所以此三平面的相交情形只有 3 種．

現在將三平面的方程式聯立起來並編號為

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 & ① \\ 2x+3y+4z=2 & ② \\ 3x+5y+7z=3 & ③ \end{cases}.$$

利用加減消去法，由②－①×2 及③－①×3 消去 x，得

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 & ① \\ -y-2z=0 & ④ \\ -y-2z=0 & ⑤ \end{cases}.$$

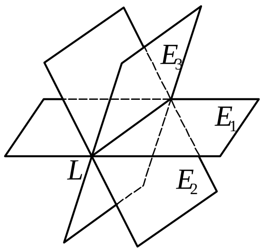
令 $z=t$，代入④，解得 $y=-2t$，

再將 $y=-2t$，$z=t$ 代回①，解得 $x=1+t$．

可得聯立方程式有無限多組解，其解為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為實數）．

因此在幾何上，此三平面兩兩不重合，且相交於一直線 L，

如下圖所示．



2. **已知空間中四平面 E_1：$x-2y+3z=5$，E_2：$2x+y-3z=-3$，E_3：$3x+y+2z=8$，E_4：$x+3y+4z=k$ 恰交於一點，求實數 k 的值．**

Ans：12

【詳解】

由聯立方程式$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x+y+2z=8 \end{cases}$解得

$(x，y，z)=(1，1，2)$，

即三平面 E_1，E_2 及 E_3 恰交於一點$(1，1，2)$．

由題意得知點$(1，1，2)$在平面 E_4 上，

將$(1，1，2)$代入 E_4 的方程式，

得 $1+3+8=k$，解得 $k=12$．

3. **已知聯立方程式$\begin{cases} x-\ \ y-2z=3 \\ 2x+2y+\ \ z=1 \\ 3x+ay-\ \ z=b \end{cases}$有無限多組解，求 a，b 的值．**

Ans：$a=1$，$b=4$

【詳解】

因為聯立方程式有無限多組解，

所以 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{vmatrix}=0$．

展開得 $-2-3-4a+12-a-2=0$，

整理得 $5a=5$，解得 $a=1$．

代入原聯立方程式，得$\begin{cases} x-\ \ y-2z=3 & ① \\ 2x+2y+\ \ z=1 & ② \\ 3x+\ \ y-\ \ z=b & ③ \end{cases}$，

利用加減消去法，由②－①×2 及③－①×3 消去 x，得

$\begin{cases} x-y-2z=3 & ① \\ 4y+5z=-5 & ④ \\ 4y+5z=b-9 & ⑤ \end{cases}$．

因為聯立方程式有無限多組解，

所以由④和⑤可得 $b-9=-5$，解得 $b=4$．

4. **設 a 為實數，關於三平面 $x+y-z=1$，$2x+3y+az=3$，$x+ay+3z=2$．**

(1) 若三平面兩兩不重合，且相交於一直線，則 a 的值為何？

(2) 若三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點，則 a 的值為何？

Ans：(1) 2，(2) -3

【詳解】

計算 $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&a\\1&a&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&a+2\\1&a-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a+2\\a-1&4\end{vmatrix}$

$=-(a+3)(a-2)$．

因為當 $\Delta\neq 0$ 時，三平面恰交於一點，所以考慮 $\Delta=0$，

即 $a=2$ 或 -3 的情形：

(1) 當 $a=2$ 時，聯立方程式為 $\begin{cases}x+y-z=1 & ①\\2x+3y+2z=3 & ②\\x+2y+3z=2 & ③\end{cases}$，

利用加減消去法，由②－①×2 及③－①消去 x，

得 $\begin{cases}x+y-z=1 & ①\\y+4z=1 & ④\\y+4z=1 & ⑤\end{cases}$，

由聯立方程式得知有無限多組解．

因為三平面的法向量均不互相平行，

所以此三平面兩兩不重合，且相交於一直線．

(2) 當 $a=-3$ 時，聯立方程式為 $\begin{cases}x+y-z=1 & ①\\2x+3y-3z=3 & ②\\x-3y+3z=2 & ③\end{cases}$，

利用加減消去法，由②－①×2 及③－①消去 x，

得 $\begin{cases}x+y-z=1 & ①\\y-z=1 & ④\\-4y+4z=1 & ⑤\end{cases}$，

並由⑤得 $y-z=-\dfrac{1}{4}$．由聯立方程式得知無解．

因為三平面的法向量均不互相平行，

所以此三平面兩兩交於一直線，但沒有共同交點．

5. **已知** $\Delta=\begin{vmatrix}k & -3 & 5\\ 1 & -2 & k\\ 3 & 3 & -k\end{vmatrix}=-(k-3)(k+15)$**，且聯立方程式** $\begin{cases}kx-3y+5z=15\\ x-2y+kz=3k\\ 3x+3y-kz=-3k\end{cases}$

恰有一組解，求

(1) 實數 k **的範圍．**

(2) 聯立方程式的解．

Ans：(1) $k\neq3$ 且 $k\neq-15$，(2) $x=0$，$y=0$，$z=3$

【詳解】

(1) 因為聯立方程式恰有一組解，所以 $\Delta\neq0$，即

$$\Delta=\begin{vmatrix}k & -3 & 5\\ 1 & -2 & k\\ 3 & 3 & -k\end{vmatrix}=-(k-3)(k+15)\neq0$$.

故 $k\neq3$ 且 $k\neq-15$．

(2) 計算行列式：

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}15 & -3 & 5\\ 3k & -2 & k\\ -3k & 3 & -k\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5 & -3 & 5\\ k & -2 & k\\ -k & 3 & -k\end{vmatrix}=0$$,

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}k & 15 & 5\\ 1 & 3k & k\\ 3 & -3k & -k\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}k & 5 & 5\\ 1 & k & k\\ 3 & -k & -k\end{vmatrix}=0$$,

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}k & -3 & 15\\ 1 & -2 & 3k\\ 3 & 3 & -3k\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}k & -3 & 5\\ 1 & -2 & k\\ 3 & 3 & -k\end{vmatrix}=3\Delta$$,

利用克拉瑪公式，得其解為

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=0,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=0,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{3\Delta}{\Delta}=3 .$$

6. **已知聯立方程式** $\begin{cases}2x-\ \ y-\ \ z=0\\ 3x+\ \ y-4z=0\\ 5x-2y+\ kz=0\end{cases}$ **除了** $x=0$**，**$y=0$**，**$z=0$ **外，**

還有其他組解，求

(1) 實數 k **的值．**

(2) x^2+y+z **的最小值．**

Ans：(1) -3，(2) -1

【詳解】

(1) 由題意得知，聯立方程式中的三個平面至少有二個交點，

因此聯立方程式有無限多組解．

計算 $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -4\\ 5 & -2 & k\end{vmatrix}=5k+15$，

因為當 $\Delta\neq 0$，聯立方程式恰有一解，

所以當聯立方程式有無限多組解時，

$\Delta=0$，故 $k=-3$．

(2) 將 $k=-3$ 代入聯立方程式，得 $\begin{cases}2x-y-z=0 & ①\\ 3x+y-4z=0 & ②\\ 5x-2y-3z=0 & ③\end{cases}$，

利用加減消去法，由②＋①及③－①×2 消去 y，

得 $\begin{cases}2x-y-z=0 & ①\\ 5x-5z=0 & ④\\ x-z=0 & ⑤\end{cases}$．

令 $x=t$，代入⑤得 $z=t$，再代入①得 $y=t$，

即聯立方程式的解為 $x=t$，$y=t$，$z=t$，t 為實數．

因此 $x^2+y+z=t^2+t+t=t^2+2t=(t+1)^2-1$，

故當 $t=-1$ 時，x^2+y+z 有最小值 -1．

7. **某公司有甲、乙、丙三條生產線，現欲生產三萬個產品，如果甲、乙、丙三條生產線同時開動，則需 10 小時；如果只開動乙、丙兩條生產線，則需 15 小時；如果只開動甲生產線 15 小時，則需再開動丙生產線 30 小時，才能完成所有產品．問如果只開動乙生產線，則需多少小時才能生產三萬個產品？**

Ans：20 小時

【詳解】

設甲、乙、丙獨立生產時，分別需要 x，y，z 小時．

由題意列得聯立方程式 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{15}\\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{30}{z}=1\end{cases}$，

解得 x＝30，y＝20，z＝60．

故只開動乙生產線，需 20 小時才能生產三萬個產品．

進階題

8. 假設坐標空間中三相異平面 E_1、E_2、E_3 皆通過 $A(-1,2,0)$ 與 $B(3,0,2)$ 兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？ 【94 學測】

(1) $(2,2,2)$．**(2)** $(1,1,1)$．**(3)** $(4,-2,2)$．**(4)** $(-2,4,0)$．**(5)** $(-5,-4,-2)$．

Ans：(2)

【詳解】

題意知三平面共線，僅需驗證向量是否成比例，即知是否在線上，亦即在三平面上．令 $P(-1，2，0)$，$Q(3，0，2)$，

$\overrightarrow{PQ}=(4，-2，2)=2(2，-1，1)$，

(A) ╳：令 $A(2，2，2)$，$\overrightarrow{PA}=(3，0，2)\not\parallel\overrightarrow{PQ}$．

(B) ○：令 $B(1，1，1)$，$\overrightarrow{PB}=(2，-1，1)//\overrightarrow{PQ}$．

(C) ╳：令 $C(4，-2，2)$，$\overrightarrow{PC}=(5，-4，2)\not\parallel\overrightarrow{PQ}$．

(D) ╳：令 $D(-2，4，0)$，$\overrightarrow{PD}=(-1，2，0)\not\parallel\overrightarrow{PQ}$．

(E) ╳：令 $E(-5，-4，-2)$，$\overrightarrow{PE}=(-4，-6，-2)\not\parallel\overrightarrow{PQ}$．

9. 設 a，b，c 為實數，下列有關聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的敘述，哪些是正確的？

(1) 若此聯立方程式有解，則必定恰有一組解．

(2) 若此聯立方程式有解，則 $11a-3b\neq 7$．

(3) 若此聯立方程式有解，則 $c=14$．

(4) 若此聯立方程式無解，則 $11a-3b=7$．

(5) 若此聯立方程式無解，則 $c\neq 14$． 【98 學測】

Ans：(4)(5)

【詳解】

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}=28+30a+4b-8a-42-10b=22a-6b-14，$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & c \end{vmatrix}=4c+30-4-8-6c+10=28-2c，$$

(A) 若此線性方程組有解，則可能恰有一組解或無限多解。

(B)(C) 若此線性方程組有解，則

11a－3b≠7 或(11a－3b＝7，c＝14)。

(D) 若此線性方程組無解，則△＝0，即 11a－3b＝7。

(E) 若此線性方程組無解，則△＝0，$\triangle_z$≠0，即 c≠14。

10. 已知 x＝4，y＝2，z＝3 是聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 唯一的一組解，

求聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+2b_1y+3c_1z=4d_1 \\ a_2x+2b_2y+3c_2z=4d_2 \\ a_3x+2b_3y+3c_3z=4d_3 \end{cases}$ 的解．

Ans：x＝16，y＝4，z＝4

【詳解】

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，

則 $\Delta'=\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 3c_1 \\ a_2 & 2b_2 & 3c_2 \\ a_3 & 2b_3 & 3c_3 \end{vmatrix}=6\Delta$，$\Delta_x{}'=\begin{vmatrix} 4d_1 & 2b_1 & 3c_1 \\ 4d_2 & 2b_2 & 3c_2 \\ 4d_3 & 2b_3 & 3c_3 \end{vmatrix}=24\Delta_x$，

$\Delta_y{}'=\begin{vmatrix} a_1 & 4d_1 & 3c_1 \\ a_2 & 4d_2 & 3c_2 \\ a_3 & 4d_3 & 3c_3 \end{vmatrix}=12\Delta_y$，$\Delta_z{}'=\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4d_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4d_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4d_3 \end{vmatrix}=8\Delta_z$．

因為 x＝4，y＝2，z＝3 為第一個聯立方程式唯一的一組解，

所以 $\Delta\neq 0$，且 $\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=4$，$\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=2$，$\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=3$．

因此第二個聯立方程式的解為

$$x=\frac{\Delta_x{}'}{\Delta'}=\frac{24\Delta_x}{6\Delta}=\frac{24}{6}\times 4=16，$$

$$y=\frac{\Delta_y{}'}{\Delta'}=\frac{12\Delta_y}{6\Delta}=\frac{12}{6}\times 2=4，$$

$$z=\frac{\Delta_z{}'}{\Delta'}=\frac{8\Delta_z}{6\Delta}=\frac{8}{6}\times 3=4．$$

11. **設聯立方程式** $(L):\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ **恰有一組解(4，5，6)，且聯立方程式**

$(L'):\begin{cases}(2a_1+3b_1)x+4b_1y+c_1z=d_1\\ (2a_2+3b_2)x+4b_2y+c_2z=d_2\\ (2a_3+3b_3)x+4b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ **也恰有一組解(α，β，γ)，求 α 的值．**

Ans：2

【詳解】

在聯立方程式(L)中，

若 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，則 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=4$ ．

在聯立方程式(L')中，

$$\Delta'=\begin{vmatrix}2a_1+3b_1&4b_1&c_1\\2a_2+3b_2&4b_2&c_2\\2a_3+3b_3&4b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a_1&4b_1&c_1\\2a_2&4b_2&c_2\\2a_3&4b_3&c_3\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=8\Delta,$$

$\times(-\frac{3}{4})$

且 $\Delta_x'=\begin{vmatrix}d_1&4b_1&c_1\\d_2&4b_2&c_2\\d_3&4b_3&c_3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=4\Delta_x$ ．

故 $\alpha=\dfrac{\Delta_x'}{\Delta'}=\dfrac{4\Delta_x}{8\Delta}=\dfrac{4}{8}\times4=2$ ．

12. **設聯立方程式** $L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$**所表示的三平面互異，有一組解(1，2，3)．**

若聯立方程式 $L':\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ **有一解(3，2，1)，**

則下列哪些選項為聯立方程式 L'的解？

(1) (1，2，3)，(2) (5，6，7)，(3) (6，7，8)，(4) (2，0，−2)，(5) (13，22，31)．

Ans：(2)(4)(5)

【詳解】

因為聯立方程式 L 中三個平面互異，
且至少有兩個交點(0，0，0)與(1，2，3)，

所以三平面交於一直線，且此直線的方向向量為 $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$ ．

因為聯立方程式 L 有無限多組解，所以 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ ．

於是聯立方程式 L'不是無解就是無限多組解．
但是因為(3,2,1)為 L' 的一組解，所以 L'有無限多組解．

因此三平面交於一直線，且此線與 $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$ 平行．

由直線的參數式，得三平面的交線參數式為

$\begin{cases} x=3+t, \\ y=2+2t, \\ z=1+3t, \end{cases}$（$t$ 為實數）．

將各選項代入檢查，得僅選項(2)(4)(5)的點在交線上．
故正確的選項為(2)(4)(5)．

13. **設** a **是不為零的實數，且三元一次聯立方程式**

$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3} \\ \dfrac{y-5}{3}=z-4 \\ \dfrac{x}{a}=z-2 \\ \dfrac{y+1}{3}=z-2 \end{cases}$ **有解，試問下列哪些選項是正確的？**

(1) $a=2$ ．

(2) 原聯立方程式有唯一解．

(3) 聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3} \\ \dfrac{x}{a}=z-2 \end{cases}$ **有無窮多解．**

(4) 聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}=z-2 \\ \dfrac{y+1}{3}=z-2 \end{cases}$ **有唯一解．**

(5) 聯立方程式 $\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ \dfrac{y-5}{3}=z-4\end{cases}$ **有無窮多解．** **【96 指甲】**

Ans：(2)(3)(5)

【詳解】

由①② $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=z-4=k$

⇒ x＝2k＋3，y＝3k＋5，z＝k＋4，

代入④ ⇒ $\dfrac{3k+5+1}{3}=k+4-2$

⇒ k＋2＝k＋2 ⇒ k 為任意數。

(1) 代入③ ⇒ $\dfrac{2k+3}{a}=k+4-2$

⇒ 2k＋3＝a(k＋2) ⇒k＝ $\dfrac{3-2a}{a-2}$ ⇒ a≠2。

(2) 當 a≠2，a≠0 時，原方程組恰有一組解。

(3) 由①得 3x－2y＋1＝0，法向量 $\vec{v}_1$＝(3，–2，0)，
由③得 x－ay＋2a＝0，法向量 $\vec{v}_3$＝(1，–a，0)，
此兩法向量不平行，兩平面恰交於一直線，
故有無限多解。

(4) 與(3)同理，有無限多解。

(5) ①②有無窮多解：
x＝2k＋3，y＝3k＋5，z＝k＋4，k 為任意實數。

14. **設** $\triangle ABC$ **的三頂點坐標分別為** $A(-2,7,15)$**，** $B(1,16,3)$**，** $C(10,7,3)$ **．**

(1) 求通過 A**，** B**，** C **三點的平面方程式．**

(2) 求 $\triangle ABC$ **的外心坐標．** **【96 指甲】**

Ans：(1) x＋y＋z＝20，(2) (3，9，8)

【詳解】

(1) 設 E：ax＋by＋cz＝d，
A(–2，7，15)代入得 –2a＋7b＋15c＝1……①，
B(1，16，3)代入得 a＋16b＋3c＝1………②，
C(10，7，3)代入得 10a＋7b＋3c＝1………③
③－② ⇒ a－b＝0 ⇒ b＝a，

代入② $\Rightarrow 17a+3c=1 \Rightarrow 3c=1-17a$，

代入① $\Rightarrow -2a+7a+5(1-17a)=1$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{20}$，$b=\dfrac{1}{20}$，$c=\dfrac{1}{20}$，

故得 E：$x+y+z=20$。

(2) 外心 O 到三頂點等距離且在平面 ABC 上，

設 O(p，q，r)，則

$(p+2)^2+(q-7)^2+(r-15)^2=(p-1)^2+(q-16)^2+(r-3)^2$

$=(p-10)^2+(q-7)^2+(r-3)^2$

$\Rightarrow 4p-14q-30r+278$

$=-2p-32q-6r+266$

$=-20p-14q-6r+158$

$\Rightarrow 6p+18q-24r+12=0$，

$18p-18q+108=0$

$\Rightarrow p+3q-4r+2=0$……① ，

$p-q+6=0$……②

②代入① $\Rightarrow p+3(p+6)-4r+2=0$

$\Rightarrow r=p+5$，代入 E 得

$p+(p+6)+(p+5)=20$

$\Rightarrow p=3$，$q=9$，$r=8$，

故外心為 O(3，9，8)。

15. **一礦物內含 *A*、*B*、*C* 三種放射性物質，放射出同一種輻射．已知 *A*、*B*、*C***
每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 *A*、*B*、*C*
每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ 倍．於一年前測得此礦物的
輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，
且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，求目前此礦物中 *A*、*B*、*C* 物質
之質量分別為多少公克．　　【100 學測】

Ans： *A*: 4公克， *B*: 1公克， *C*: 2公克

【詳解】

設目前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別為

x、y、z 公克，

則半年前此礦物中 A、B、C 物質的

質量分別為 2x、3y、4z 公克，

且一年前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別
為 4x、9y、16z 公克，則

$$\begin{cases} 4x+18y+16z=66\cdots(1) \\ 2x+6y+4z=22\cdots\cdots(2) \\ x+2y+z=8\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(1)－(2)×2

$\Rightarrow$ 6y＋8z＝22 $\Rightarrow$ 3y＋4z＝11……(4)

(2)－(3)×2

$\Rightarrow$ 2y＋2z＝6 $\Rightarrow$ y＋z＝3…………(5)

(4)－(5)×3 $\Rightarrow$ z＝2，

代入(5) $\Rightarrow$ y＋2＝3 $\Rightarrow$ y＝1，

代入(3) $\Rightarrow$ x＋2＋2＝8 $\Rightarrow$ x＝4，

故目前此礦物中 A、B、C 物質的質量
分別為 4、1、2 公克。