

數學 2

進階
講義

獨立事件的定義

景美女中 · 莊嘉銘 老師



信望愛文教基金會

6-4-1 獨立事件的定義

定理證明或說明

1. 定義

設 A, B 為同一樣本空間的兩事件，若 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ，則我們稱 A 與 B 為獨立事件。

2. 特性

(1) 若 A 與 B 為獨立事件，則

$$(I) P(B | A) = P(B)$$

$$(II) P(A | B) = P(A)$$

(2) 若 A 與 B 為獨立事件，則

(I) A' 與 B 亦為獨立事件

(II) A 與 B' 亦為獨立事件

(III) A' 與 B' 亦為獨立事件

3. 不是獨立的兩事件稱為相依事件或相關事件

關鍵字

獨立事件、互不影響

例題 1

A, B 為同一樣本空間之二事件， $P(A) = 0.6$ ， $P(A \cup B) = 0.8$ ，若 A, B 為獨立事件，則 $P(B) =$

(1) 0.7 (2) 0.4 (3) 0.5 (4) 0.3 (5) 0.2。

Ans :

因為 A 與 B 為獨立事件，所以 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{所以 } 0.8 = 0.6 + P(B) - 0.6 \times P(B) \Rightarrow 0.2 = 0.4 \times P(B)$$

$$\text{故 } P(B) = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

所以選(3)

例題 2

設 A, B 為獨立事件，且 $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ，則

$$(1) P(B) = \frac{1}{3} \quad (2) P(A|B) = \frac{1}{3} \quad (3) P(A' \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$(4) P(A'|B) = \frac{2}{3} \quad (5) P(B'|A) = \frac{2}{3}$$

Ans :

因為 A 與 B 為獨立事件，所以 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\text{又 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3} \times P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times P(B)$$

$$P(B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{所以(1)錯誤}$$

又因為 A 與 B 為獨立事件，則 A' 與 B 、 A' 與 B' 及 A 與 B' 亦為獨立事件

$$(2) P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3} \quad \therefore (2) \text{正確}$$

$$(3) P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \therefore (3) \text{正確}$$

$$(4) P(A'|B) = P(A') = \frac{2}{3} \quad \therefore (4) \text{正確}$$

$$(5) P(B' | A) = P(B') = \frac{1}{2} \quad \therefore (5) \text{錯誤}$$

故所求為(2)(3)(4)

例題 3

設甲、乙兩人獨立解出一題數學問題的機率分別為 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。今兩人同解某一問題且互不相互影響，試問：

- (1) 甲、乙兩人均解出此題的機率
- (2) 恰有一人解出的機率
- (3) 已知恰有一人解出此題，求是乙解出的機率
- (4) 兩人均解不出的機率
- (5) 此題被解出的機率

Ans：

因為互不影響，所以甲乙解題為獨立事件

$$(1) P(\text{甲解出} \cap \text{乙解出}) = P(\text{甲解出}) \times P(\text{乙解出}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(2) P(\text{恰一人解出}) = P(\text{甲解出乙失敗}) + P(\text{甲失敗乙解出})$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

$$(3) P(\text{乙解出} | \text{恰一人解出}) = \frac{P(\text{甲失敗乙解出})}{P(\text{恰一人解出})} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$$

$$(4) P(\text{兩人均解不出}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$(5) \text{所求為}(1) + (2) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$(\text{另解：} P(\text{此題被解出}) = 1 - P(\text{兩人均解不出}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6})$$

例題 4

某藥品測試欲徵求試用者135人，其性別與國籍雙向表如表，若欲使性別與國籍獨立，且 $x > y$ ，試求數對 (x, y) 為何？

	本國籍	外國籍
男性	50	x
女性	y	20

Ans：

由題意知共135人，所以 $x + y = 65$

而性別與國籍獨立，所以 $50 : x = y : 20 \Rightarrow xy = 1000$

所以 $(x, y) = (40, 25)$

例題 5

設 A, B 為兩事件， $P(A) = \frac{1}{3}$ 及 $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

(1) 當 A, B 為互斥事件時，求 $P(B)$

(2) 當 A, B 為獨立事件時，求 $P(B)$

Ans：

(1) 當 A, B 為互斥事件，即 $P(A \cap B) = 0$

所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$$\text{即 } \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(2) 當 A, B 為獨立事件，即 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{即 } \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3} \times P(B) \Rightarrow \frac{2}{3} P(B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } P(B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$



習題 1

設 A, B 為獨立事件，且 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，請選出正確的選項：

(1) $P(A \cap B) = \frac{5}{6}$ (2) $P(B|A) = \frac{1}{3}$ (3) $P(A|B) = \frac{1}{3}$

(4) $P(B|A') = \frac{1}{3}$ (5) $P(B'|A') = \frac{2}{3}$

習題 2

若 A, B 為獨立事件， $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ，試求下列各機率：

(1) $P(B)$ (2) $P(A|B)$

習題 3

甲生解題平均 4 題答對 3 題，乙生解題平均 6 題答對 2 題，若兩人解題為獨立事件，今兩人同解一題，求此題被解出的機率為何？

習題 4

某校數學教師針對高三學生隨機選出 30 名男學生及 20 名女學生，做新教材適應性的調查，每一位學生都要填答，且只能填答適應或不適應，結果有 35 名學生填答無法適應新教材內容。假設學生性別與適應狀況獨立，請完成下列表格，使其最能符合上述假設。

適應狀況 性別	適應狀況	
	適應	不適應 (35 人)
男生 (30 人)	(1) _____ 人	(2) _____ 人
女生 (20 人)	(3) _____ 人	(4) _____ 人

習題 5

設 A, B 為兩事件， $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ，

- (1) 若 A, B 是互斥事件，則 $P(B)$ 為何？
(2) 若 A, B 是獨立事件，則 $P(A' | B)$ 為何？



習題 1：(2)(4)(5)

【詳解】 $\because A, B$ 為獨立事件 $\therefore P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 且 A' 與 B 、 A 與 B' 及 A' 與 B' 亦為獨立事件

$$\text{所以 } P(B | A) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A | B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B | A') = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(B' | A') = P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ 故選(2)(4)(5)}$$

習題 2：(1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{4}$

【詳解】(1) $\because A, B$ 為獨立事件 $\therefore P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\text{由於 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{7}{15}$$

$$(2) P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$$

習題 3 : $\frac{5}{6}$

【詳解】(1) 正面思考：

$$P(\text{此題被解出}) = P(\text{甲解出}) + P(\text{乙解出}) - P(\text{甲乙均解出})$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{18 + 20 - 15}{24} = \frac{23}{24}$$

(2) 反面思考：

$$P(\text{此題被解出}) = 1 - P(\text{甲乙均失敗}) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{23}{24}$$

習題 4 : (1) 9 (2) 21 (3) 6 (4) 14

【詳解】設男生中不適應者有 x 人，則表格如下：

適應狀況 性別	適應	不適應
男生	$30 - x$	x
女生	$x - 15$	$35 - x$

因為性別與適應狀況獨立，故 $P(\text{適應}|\text{男生}) = P(\text{適應})$

$$\Rightarrow \frac{30 - x}{30} = \frac{15}{50} \Rightarrow x = 21$$

故答案為

適應狀況 性別	適應	不適應
男生	9	21
女生	6	14

習題 5 : (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

【詳解】(1) 若 A, B 是互斥事件，則 $P(A \cap B) = 0$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

(2) 若 A, B 是獨立事件，則 $P(A' | B) = P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$