# 選修數學 進階講義 上

## 扇形面積公式

大同高中·陳盈穎老師

信望愛文教基金會

# 16-1-3　扇形面積公式

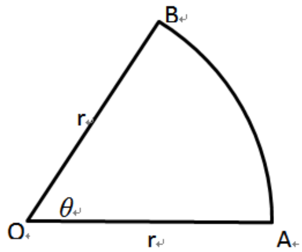
## 定理敘述

**◆扇形面積公式**

若一扇形的半徑為 $r$ ，圓心角為 $\theta$(弧度)，則其面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ 。

## 定理證明或說明

◆如右圖，扇形 AOB 的面積 $=\pi\cdot r^2\times\frac{\theta}{360°}$ ，其中圓心角 θ 的單位為度度量，若我們將角度的單位，改為弧度量，則扇形 AOB 的面積 $=\pi\cdot r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$ ，其中圓心角 θ 的單位為弧度量。




## 關鍵字

弧度、扇形面積

## 注意事項

使用面積公式時要注意角度的單位是否為弧度。

**例題 1**

設一扇形半徑為 2，面積為 6，則其圓心角為__________（弧度）。

Ans：3 弧度

解：由扇形面積公式 $A=\frac{1}{2}r^2\theta\Rightarrow 6=\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta\Rightarrow\theta=3$（弧度）

## 例題 2

若一個扇形的周長為 $a$ 單位，面積為 $b$ 平方單位，其中 $a=b$，且扇形的圓心角為 $(\frac{2\times180}{\pi})^\circ$，則其扇形之半徑為多少單位？

Ans：4 單位

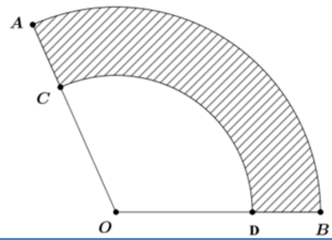
解：圓心角 $\theta=(\frac{2\times180}{\pi})^\circ=2$（弧度）

得周長 $a=2r+r\theta=4r$，$b=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2\times2=r^2$

$\Rightarrow 4r=r^2\Rightarrow r=4$ 或 $r=0$（不合）

## 例題 3

如圖，扇形 $OAB$ 與扇形 $OCD$ 中，若 $\overline{OA}=3$，$\overline{OC}=2$，且 $\overset{\frown}{AB}=6$，則斜線面積為__________。




Ans：5 平方單位

解：$\overset{\frown}{AB}=6=r\theta=3\theta\Rightarrow\theta=2$（弧度）

所以斜線面積＝扇形 $OAB$ 面積－扇形 $OCD$ 面積

$$=\frac{1}{2}\times3^2\times2-\frac{1}{2}\times2^2\times2=5$$

## 例題 4

若一圓錐之底圓半徑為 3，高為 4，則其側面展開之扇形面積為__________。

Ans：$15\pi$

解：由圓錐之底圓半徑為 3，高為 4，

得側面展開之扇形半徑為 5，弧長為 $6\pi\Rightarrow\theta=\frac{6\pi}{5}$

所求之扇形面積 $=\frac{1}{2}\times5^2\times\frac{6\pi}{5}=15\pi$

## 例題 5

在平面坐標中，有一扇形 $OAB$，其中 $O(0,0)$、$A(\sqrt{3},-3)$，$B(\sqrt{3},3)$ 且 $\angle AOB>\pi$，求其扇形面積。

Ans：$8\pi$

解：$\overline{OA}=(\sqrt{3},-3)$，$\overline{OB}=(\sqrt{3},3)$

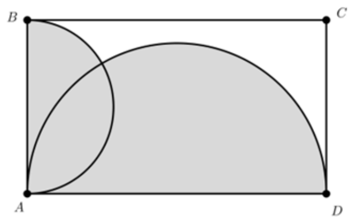
設此兩向量的夾角為 $\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{|\overline{OA}||\overline{OB}|}=\dfrac{-6}{12}=-\dfrac{1}{2}\ \therefore \theta=\dfrac{2}{3}\pi$

依題意 $\angle AOB>\pi \Rightarrow \angle AOB=\dfrac{4}{3}\pi$，扇形半徑為 $2\sqrt{3}$

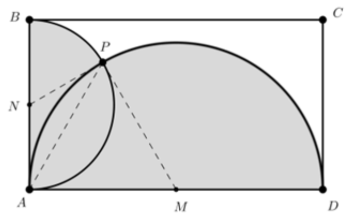
故所求扇形面積為 $\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{4}{3}\pi=8\pi$

## 例題 6

如圖，矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2\sqrt{6}$、$\overline{AD}=6\sqrt{2}$，以 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 為直徑作半圓，則著色面積為________




Ans：$7\pi+6\sqrt{3}$




解：設 M、N 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 中點、P 為兩半圓交點

則 $B-P-D$ 共線，且 $\angle ABD=\dfrac{\pi}{3}$、$\angle ADB=\dfrac{\pi}{6}$

所求著色面積 $=\Delta AMP$ 面積 $+\Delta ANP$ 面積 $+$ 扇形 $DMP$ 面積 $+$ 扇形 $BNP$ 面積

$$=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2})^2\times\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\times(\sqrt{6})^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=7\pi+6\sqrt{3}$$

## 溫故知新

## 習題 1

設一扇形半徑為 2，弧長為 6(弧度)，則其面積為________。

### 習題 2

若一個扇形的周長為 $a$ 單位，面積為 $b$ 平方單位，其中 $a=2b$，且扇形的圓心角為 $(\frac{2\times180}{\pi})^\circ$，則其扇形之半徑為多少單位？

### 習題 3

若一圓錐之底圓直徑為 6，其側面展開之扇形面積為 $12\pi$，則此圓錐之高為_________。

### 習題 4

已知一直圓錐之底圓周長為 $6\pi$，且其體積為 $12\pi$，則其側面展開之扇形面積為？

### 習題 5

在平面坐標中，有一扇形 $OAB$，其中 $O(0,0)$、$A(2\cos\frac{\pi}{3},2\sin\frac{\pi}{3})$，$B(2\cos\pi,2\sin\pi)$ 且 $\angle AOB<\pi$，求其扇形面積。

### 習題 6

將長度為 1 公尺的繩子圍成一扇形，則圍成扇形的最大面積為_________平方公尺。

### 習題 7　【指考甲 97】

若空間中一球面 $S$ 與兩平面 $z=4$ 及 $z=8$ 相交的圓面積皆為 $36\pi$，則 $S$ 與平面 $z=7$ 相交的圓面積為____________

## 解答與解析

習題 1：12

習題 2：2 單位

習題 3：$\sqrt{7}$

習題 4：$15\pi$

習題 5：$\frac{4}{3}\pi$

習題 6： $\frac{1}{8}$

習題 7： $39\pi$

解：由球面 $S$ 與兩平面 $z=4$ 及 $z=8$ 相交的圓面積皆為 $36\pi$

得此兩平面與球心的距離皆為 2、球心在平面 $z=6$ 上且其半徑為 $2\sqrt{10}$

所以 $S$ 與平面 $z=7$ 相交的圓半徑為 $\sqrt{39}$

故所求圓面積為 $39\pi$