

# 100 學測解析

## 數學科

陳清海 老師



信望愛文教基金會

# 大學入學考試中心 100 學年度學科能力測驗試題數學考科

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

一、單選題（佔 30 分）

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 有一箱子，內有 3 黑球與 2 白球。有一遊戲，從箱子中任取一球。假設每一球被取出的機會都相同，若取出黑球可得獎金 50 元，而取出白球可得獎金 100 元，則下列哪一個選項是此遊戲的獎金期望值？

- (1) 70 元，
- (2) 75 元，
- (3) 80 元，
- (4) 85 元，
- (5) 90 元。

Ans : (1)

【詳解】

此遊戲的獎金期望值為

$$E = 50 \times \frac{3}{5} + 100 \times \frac{2}{5} = 30 + 40 = 70 \text{ 元。}$$

2. 多項式  $4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$  等於下列哪一個選項？

- (1)  $x(x+1)^2$ ，
- (2)  $2x(x-1)^2$ ，
- (3)  $x(x+1)(x-1)$ ，
- (4)  $2x(x-1)^2(x+1)$ ，
- (5)  $2x(x-1)(x+1)$ 。

Ans : (5)

【詳解】

設  $f(x) = 4(x^2+1) + (x+1)^2(x-3) + (x-1)^3$ ，

$f(0) = 4 \times 1 + 1 \times (-3) + (-1)^3 = 0$ ，故  $x$  是  $f(x)$  的因式；

$f(1) = 4 \times 2 + 4 \times (-2) + 0 = 0$ ，故  $x-1$  是  $f(x)$  的因式；

$f(-1) = 4 \times 2 + 0 \times (-4) + (-2)^3 = 0$ ，故  $x+1$  是  $f(x)$  的因式；

又  $f(x)$  的首項係數為 2，故選(5)。

【另解】

$$\begin{aligned}f(x) &= 4(x^2 + 1) + (x^2 + 2x + 1)(x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1) \circ\end{aligned}$$

3. 設  $(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$ ， $n$  為正整數，且知  $a_n$  皆為正。令  $b_n = \log a_n$ ，則

數列  $b_1, b_2, b_3, \dots$  為

- (1) 公差為正的等差數列，
- (2) 公差為負的等差數列，
- (3) 公比為正的等比數列，
- (4) 公比為負的等比數列，
- (5) 既非等差異非等比數列。

Ans : (2)

【詳解】

$$(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2, \text{ 兩邊取對數}$$

$$\Rightarrow 2\log(a_{n+1}) = \log \frac{1}{\sqrt{10}} + 2\log(a_n)$$

$$\Rightarrow 2\log(a_{n+1}) = -\frac{1}{2} + 2\log(a_n)$$

$$\Rightarrow \log(a_{n+1}) - \log(a_n) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{4}$$

$\langle b_n \rangle$  是公差為  $-\frac{1}{4}$  的等差數列。

4. 座標平面上滿足方程式  $(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}) = 0$  的點  $(x, y)$  所構成的圖形為

- (1) 只有原點，
- (2) 橢圓及原點，
- (3) 兩條相異直線，
- (4) 橢圓及雙取線，
- (5) 雙取線及原點。

Ans : (3)

【詳解】

$$\left(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 0 \text{ 或 } \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 0$$

$$\Rightarrow (x=0 \text{ 且 } y=0) \text{ 或 } (4x+3y=0 \text{ 或 } 4x-3y=0)$$

$$\Rightarrow 4x-3y=0 \text{ 及 } 4x+3y=0 \text{ 兩相異直線。}$$

5. 試問下列哪一個選項是正確？

(1)  $3^7 < 7^3$  ,

(2)  $5^{10} < 10^5$  ,

(3)  $2^{100} < 10^{30}$  ,

(4)  $\log_2 3 < 1.5$  ,

(5)  $\log_2 11 < 3.5$  。

Ans : (5)

【詳解】

(1)  $3^7 = 2187$  ,  $7^3 = 343$  , 故  $3^7 > 7^3$  。

(2)  $\log_5 10 = 10 \log 5 = 10 \times 0.6990 = 6.99 > 5$  , 故  $5^{10} > 10^5$  。

(3)  $\log_2 100 = 100 \log 2 = 100 \times 0.3010 = 30.1 > 30$  , 故  $2^{100} > 10^{30}$  。

(4)  $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0.4771}{0.3010} \doteq 1.585 > 1.5$  。

(5)  $3.5 = \log_2 2^{3.5} = \log_2 8\sqrt{2} = \log_2(8 \times 1.414) = \log_2(11.312) > \log_2 11$  , 故  $\log_2 11 < 3.5$  。

6. 根據台灣壽險業的資料，男性從 0 歲、1 歲、……到 60 歲各年齡層的死亡率(單位：%) 依序為

1.0250	0.2350	0.1520	0.1010	0.0720	0.0590	0.0550	0.0540	0.0540	0.0520
0.0490	0.0470	0.0490	0.0560	0.0759	0.1029	0.1394	0.1890	0.2034	0.2123
0.2164	0.2166	0.2137	0.2085	0.2019	0.1948	0.1882	0.1830	0.1799	0.1793
0.1833	0.1862	0.1941	0.2051	0.2190	0.2354	0.2539	0.2742	0.2961	0.3202
0.3472	0.3779	0.4129	0.4527	0.4962	0.5420	0.5886	0.6346	0.6791	0.7239
0.7711	0.8229	0.8817	0.9493	1.0268	1.1148	1.2138	1.3250	1.4485	1.5851
1.7385									

經初步整理後，已知 61 個資料中共有 24 個資料小於 0.2。請問死亡率資料的中位數為下列哪一個選項？

(1) 0.2034 ,

(2) 0.2164 ,

(3) 0.2137 ,

(4) 0.2085 ,

(5) 0.2019 。

Ans : (2)

【詳解】

1.0250	0.2350	<del>0.1520</del>	<del>0.1010</del>	<del>0.0720</del>	<del>0.0590</del>	<del>0.0550</del>	<del>0.0540</del>	<del>0.0540</del>	<del>0.0520</del>
<del>0.0490</del>	<del>0.0470</del>	<del>0.0490</del>	<del>0.0560</del>	<del>0.0759</del>	<del>0.1029</del>	<del>0.1394</del>	<del>0.1890</del>	0.2034	0.2123
0.2164	0.2166	0.2137	0.2085	0.2019	<del>0.1948</del>	<del>0.1882</del>	<del>0.1830</del>	<del>0.1799</del>	<del>0.1793</del>
<del>0.1833</del>	<del>0.1862</del>	<del>0.1941</del>	0.2051	0.2190	0.2354	0.2539	0.2742	0.2961	0.3202
0.3472	0.3779	0.4129	0.4527	0.4962	0.5420	0.5886	0.6346	0.6791	0.7239
0.7711	0.8229	0.8817	0.9493	1.0268	1.1148	1.2138	1.3250	1.4485	1.5851
1.7385									

從小算起第 31 個。

## 二、多選題（佔 35 分）

說明：第 7 至 13 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。各題的選項獨立判定，所有選項軍答對者得 5 分，答錯一個選項者得 3 分，錯兩個選項者得 1 分，所有選項均未作答或答錯多於兩個選項者，該題以零分計算。

7. 設  $O$ 、 $A$ 、 $B$  分別在複數平面上代表  $0$ 、 $1+i$  以及  $1-i$  的點。請問下列哪些選項所對應的點落在  $\triangle OAB$  的內部？

(1)  $\cos 60^\circ$  ,

(2)  $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$  ,

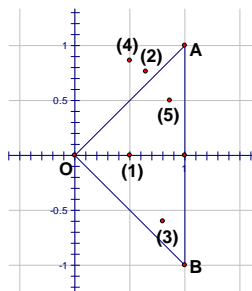
(3)  $\frac{4-3i}{5}$  ,

(4)  $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$  ,

(5)  $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25}$  。

Ans : (1)(3)(5)

【詳解】



由左圖可知選(1)(3)(5)。

8. 已知  $\sin\theta = -\frac{2}{3}$  且  $\cos\theta > 0$ ，請問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $\tan\theta < 0$ ，
- (2)  $\tan^2\theta > \frac{4}{9}$ ，
- (3)  $\sin^2\theta > \cos^2\theta$ ，
- (4)  $\sin 2\theta > 0$ ，
- (5) 標準位置角  $\theta$  與  $2\theta$  的終邊位在不同的象限。

Ans : (1)(2)

【詳解】

如右圖，

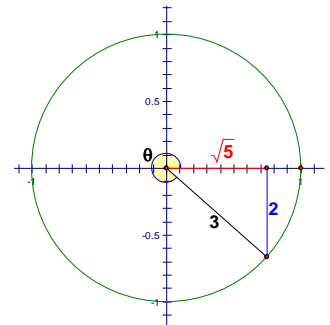
$$(1) \tan\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} < 0,$$

$$(2) \tan^2\theta = \frac{4}{5} > \frac{4}{9},$$

$$(3) \sin^2\theta = \frac{4}{9} < \frac{5}{9} = \cos^2\theta,$$

$$(4) \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta = 2 \times \frac{-2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} < 0,$$

(5)  $315^\circ < \theta < 360^\circ$ ，故  $630^\circ < 2\theta < 720^\circ$ ， $\theta$  與  $2\theta$  都在第四象限。



9. 考慮坐標平面上以  $O(0, 0)$ 、 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 4)$  為頂點的三角形，令  $C_1$ 、 $C_2$  分別為  $\triangle OAB$  的外接圓、內切圓。請問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $C_1$  的半徑為 2，
- (2)  $C_1$  的圓心在直線  $y=x$  上，
- (3)  $C_1$  的圓心在直線  $4x+3y=12$  上，
- (4)  $C_2$  的圓心在直線  $y=x$  上，
- (5)  $C_2$  的圓心在直線  $4x+3y=6$  上。

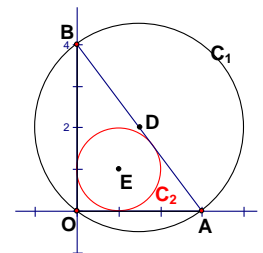
Ans : (3)(4)

【詳解】

如右圖，

$$(1) C_1 \text{ 的圓心在 } \overline{AB} \text{ 的中點 } D\left(\frac{3}{2}, 2\right), \text{ 半徑為 } \overline{OD} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}.$$

(2)  $D$  代入  $y=x$ ，不合。



(3) D 代入  $\Rightarrow 4 \times \frac{3}{2} + 3 \times 2 = 12$ ，合。

(4)(5)  $C_2$  與  $x$  軸， $y$  軸均相切，故  $C_2$  的圓心必在  $x=y$  上，而不在  $4x+3y=6$  上。

10. 坐標平面中，向量  $\vec{w}$  與向量  $\vec{v} = (2, \sqrt{5})$  互相垂直且等長。請問下列哪些選項是正確的？

(1) 向量  $\vec{w}$  必為  $(\sqrt{5}, -2)$  或  $(-\sqrt{5}, 2)$ ，

(2) 向量  $\vec{v} + \vec{w}$  與  $\vec{v} - \vec{w}$  等長，

(3) 向量  $\vec{v} + \vec{w}$  與  $\vec{w}$  的夾角可能為  $135^\circ$ ，

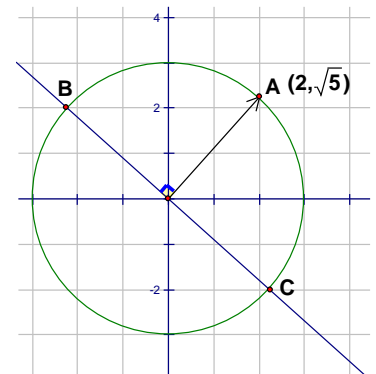
(4) 若向量  $\vec{u} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$ ，其中  $a, b$  為實數，則向量  $\vec{u}$  的長度為  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，

(5) 若向量  $(1, 0) = c \cdot \vec{v} + d \cdot \vec{w}$ ，其中  $c, d$  為實數，則  $c > 0$ 。

Ans : (1)(2)(5)

【詳解】

如右圖，



(1)  $\vec{w} = \vec{OB} = (\sqrt{5}, -2)$ ，或  $\vec{OC} = (-\sqrt{5}, 2)$ 。

(2) 取  $\vec{w} = (\sqrt{5}, -2)$ ，則

$$\begin{aligned} |\vec{v} + \vec{w}| &= |(2 + \sqrt{5}, \sqrt{5} - 2)| \\ &= |(2 - \sqrt{5}, \sqrt{5} + 2)| = |\vec{v} - \vec{w}|。 \end{aligned}$$

(3) 向量  $\vec{v} + \vec{w}$  與  $\vec{w}$  的夾角為  $45^\circ$ 。

$$\begin{aligned} (4) \quad |\vec{u}|^2 &= |a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}|^2 \\ &= a^2 \cdot |\vec{v}|^2 + b^2 \cdot |\vec{w}|^2 + 2ab \vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= 9a^2 + 9b^2 + 2ab \cdot 0 \\ \text{故 } |\vec{u}| &= 3\sqrt{a^2 + b^2}。 \end{aligned}$$

(5) 必取  $\vec{w} = (\sqrt{5}, -2)$ ,

$$(1, 0) = c \cdot \vec{v} + d \cdot \vec{w} = c(2, \sqrt{5}) + d(\sqrt{5}, -2)$$

$$\Rightarrow 2c + \sqrt{5}d = 1, \sqrt{5}c - 2d = 0$$

$$\Rightarrow 2c + \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{9} > 0.$$

11. 在坐標平面上，圓 C 的圓心在原點且半徑為 2，已知直線 L 與圓 C 相交，請問 L 與下列哪些圖形一定相交？

(1) x 軸，

(2)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，

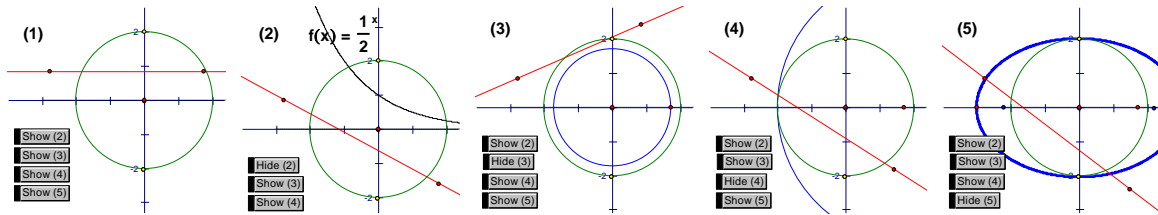
(3)  $x^2 + y^2 = 3$ ，

(4)  $(x-2)^2 + y^2 = 16$ ，

(5)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

Ans : (4)(5)

【詳解】



由上圖知，答案為(4)(5)。

12. 坐標空間中，考慮球面  $S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$  與  $A(1, 0, 0)$ 、 $B(-1, 0, 0)$  兩點。請問下列哪些選項是正確的？

(1) 原點在球面 S 上，

(2) A 點在球面 S 之外部，

(3) 線段  $\overline{AB}$  與球面 S 相交，

(4) A 點為直線  $\overline{AB}$  上距離球心最近的點，

(5) 球面  $S$  和  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$  平面分別截出的三個圓中，以與  $xy$  平面所截的圓面積為最大。

Ans : (1)(3)(4)

【詳解】

(1)  $O(0, 0, 0)$  代入  $S \Rightarrow (0-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2 = 1+4+9=14$ ，原點在球面  $S$  上。

(2)  $A(1, 0, 0)$  代入  $\Rightarrow (1-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2 = 0+4+9 < 14$ ， $A$  點在球面  $S$  之內部。

(3)  $B(-1, 0, 0)$  代入  $\Rightarrow (-1-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2 = 4+4+9 > 14$ ，

$B$  點在球面  $S$  之外部，而  $A$  點在球面  $S$  之內部，故線段  $\overline{AB}$  與球面  $S$  相交。

$$(4) \quad \overline{AB} : \begin{cases} x=1-2t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, Q(1, 2, 3),$$

$$\overline{QX} = \sqrt{(2t)^2 + 4 + 9} = \sqrt{4t^2 + 13}, \text{ 當 } t=0 \text{ 時得最小值，即 } X=A \text{ 時為最小。}$$

(5) 球心  $Q$  與  $yz$  平面最近，故  $S$  與  $yz$  平面所截的圓面積為最大。

13. 設  $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ，請問下列哪些選項是正確的？

(1)  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ ，

(2)  $f(x) = 2$  有整數解，

(3)  $f(x) = x^2 + 1$  有實數解，

(4)  $f(x) = x$  有不等於零的有理數解，

(5) 若  $f(a) = 2$ ，則  $f(-a) = 2$ 。

Ans : (3)

【詳解】

$$f(x) = x(x-1)(x+1),$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) < 0.$$

$$f(x) = x(x-1)(x+1) = 2,$$

$$\text{令 } g(x) = x^3 - x - 2,$$

$$g(1) = -2, g(-1) = -2, g(2) = 24, g(-2) = -8,$$

由牛頓定理知， $g(x) = 0$  沒有整數解。

$$f(x) = x(x-1)(x+1) = x^2 + 1, \text{ 令 } h(x) = x^3 - x^2 - x - 1,$$

$$h(0) = -1, h(2) = 8 - 4 - 2 - 1 = 1,$$

故在區間  $(0, 2)$  中有實數解。

(4)  $f(x) = x(x-1)(x+1) = x$ ，令  $k(x) = x^3 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$  其解為  $x = 0$  或  $x = \sqrt{2}$ ，或  $x = -\sqrt{2}$ ，

故沒有不等於零的有理數解。

(5) 若  $f(a) = a(a-1)(a+1) = 2$ ，則

$f(-a) = -a(-a-1)(-a+1) = -a(a+1)(a-1) = -2$ 。

### 第貳部分：選填題（佔 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(14-35)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知首項為  $a$ ，公比為  $r$  的無窮等比級數和等於 5；首項為  $a$ ，公比為  $3r$  的無窮等比級

數和等於 7，則首項為  $a$ ，公比為  $2r$  的無窮等比級數和等於  $\frac{\textcircled{14} \textcircled{15}}{\textcircled{16}}$ 。

Ans:  $\frac{35}{6}$

【詳解】

首項為  $a$ ，公比為  $r$  的無窮等比級數和  $S_1 = \frac{a}{1-r} = 5 \dots \dots \textcircled{1}$ ，

首項為  $a$ ，公比為  $3r$  的無窮等比級數和  $S_3 = \frac{a}{1-3r} = 7 \dots \dots \textcircled{2}$ ，

$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \Rightarrow \frac{1-r}{1-3r} = \frac{7}{5} \Rightarrow 7-21r = 5-5r \Rightarrow r = \frac{1}{8}$ ，

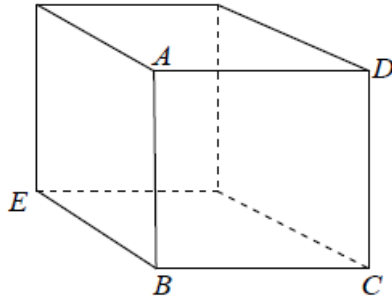
代入  $\textcircled{1} \Rightarrow \frac{a}{1-\frac{1}{8}} = 5 \Rightarrow a = \frac{35}{8}$ 。

首項為  $a$ ，公比為  $2r$  的無窮等比級數和

$S_2 = \frac{a}{1-2r} = \frac{\frac{35}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{35}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{35}{6}$ 。

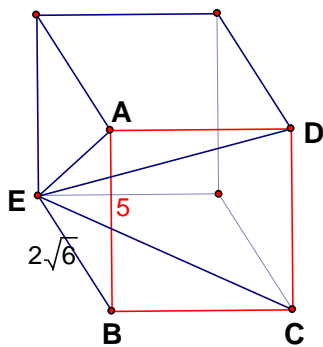
B. 空間中一長方體如下圖所示，其中  $ABCD$  為正方形， $\overline{BE}$  為長方體的一邊。已知  $\cot \angle$

$\text{AEB} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ，則  $\cot \angle \text{CED} = \frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。

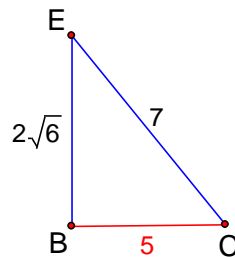


Ans :  $\frac{7}{5}$

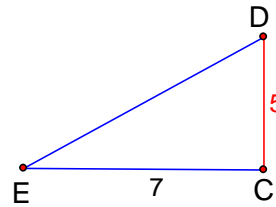
【詳解】



圖一



圖二



圖三

如上圖一， $\cot \angle AEB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ，令  $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BE} = 2\sqrt{6}$ 。

如上圖二，利用商高定理可得斜邊  $\overline{BC} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = \sqrt{24+25} = 7$ 。

如上圖三，可知  $\cot \angle CED = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{7}{5}$ 。

- C. 高三甲班共有 20 位男生，15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每人中籤的機率均等，則推派的三位同學中有男

也有女的機率為  $\frac{\binom{19}{2}\binom{20}{1}}{\binom{21}{2}\binom{22}{2}\binom{23}{1}}$ 。

Ans :  $\frac{90}{119}$

【詳解】

p(有男也有女的機率)

= p(二男一女) + (一男二女)

$$= \frac{C_2^{20} \times C_1^{15}}{C_3^{35}} + \frac{C_1^{20} \times C_2^{15}}{C_3^{35}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{20 \times 19}{2} \times 15}{35 \times 34 \times 33} + \frac{20 \times \frac{15 \times 14}{2}}{35 \times 34 \times 33} \\
&= \frac{90}{119}。
\end{aligned}$$

D. 四邊形 ABCD 中， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CD} = 5$ ， $\overline{AD} = 7$ ，且  $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ，則

對角線  $\overline{AC}$  長為  $\sqrt{2425}$ 。

Ans :  $\sqrt{32}$

【詳解】

如右圖，ABCD 必共圓，且  $\overline{BD}$  為直徑。

由餘弦定理得及  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，得

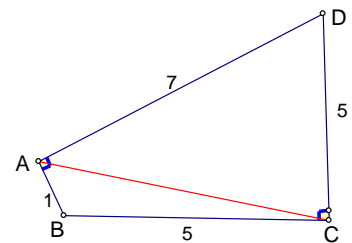
$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 5^2 - 2 \times 1 \times 5 \times \cos \angle ABC$$

$$= 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos \angle ADC$$

$$\Rightarrow 1 - 10 \cos \angle ABC = 49 - 70(-\cos \angle ABC)$$

$$\Rightarrow \cos \angle ABC = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{1 + 25 - 10 \times (-\frac{3}{5})} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}。$$



E. 一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$  倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別為 26、27、28 公克。

Ans : 4、1、2

【詳解】

設目前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別為 x、y、z 公克，

則半年前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別為 2x、3y、4z 公克，

且一年前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別為 4x、9y、16z 公克，則

$$\begin{cases} 4x+18y+16z=66 \cdots (1) \\ 2x+6y+4z=22 \cdots (2) \\ x+2y+z=8 \cdots (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \times 2 \Rightarrow 6y+8z=22 \Rightarrow 3y+4z=11 \cdots (4)$$

$$(2)-(3) \times 2 \Rightarrow 2y+2z=6 \Rightarrow y+z=3 \cdots (5)$$

$$(4)-(5) \times 3 \Rightarrow z=2,$$

$$\text{代入}(5) \Rightarrow y+2=3 \Rightarrow y=1,$$

$$\text{代入}(3) \Rightarrow x+2+2=8 \Rightarrow x=4,$$

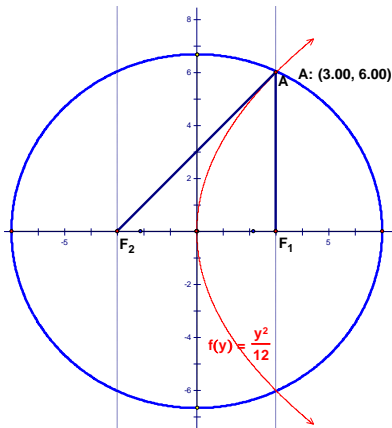
故目前此礦物中 A、B、C 物質的質量分別為 4、1、2 公克。

F. 設  $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (其中  $a > 0$ )，為焦點在  $(3, 0)$ ， $(-3, 0)$  的橢圓， $E_2$ ：焦點在  $(3, 0)$  且

準線為  $x = -3$  的拋物線。已知  $E_1, E_2$  的交點在直線  $x = 3$  上，則  $a = \underline{\underline{29+30\sqrt{31}}}$ 。

Ans :  $3+3\sqrt{2}$

【詳解】



如上圖， $E_2: y^2 = 12x$ ，設  $F_1(3, 0)$ ， $F_2(-3, 0)$ 。

因  $E_1$  與  $E_2$  的交點在直線  $x = 3$  上，故交點為  $A(3, 6)$  與  $B(3, -6)$ 。

$$2a = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 6 + \sqrt{(3+3)^2 + (6-0)^2} = 6 + 6\sqrt{2},$$

故  $a = 3 + 3\sqrt{2}$ 。

G.  $H: x - y + z = 2$  為座標空間中一平面， $L$  為平面  $H$  上的一直線。已知點  $P(2, 1, 1)$  為  $L$  上距離原點  $O$  最近的點，則  $(2, \underline{\underline{32}} \underline{\underline{33}}, \underline{\underline{34}} \underline{\underline{35}})$  為  $L$  的方向向量。

Ans :  $(2, -1, -3)$

【詳解】

P(2, 1, 1)在L上，當然在H上。

點P(2, 1, 1)為L上距離原點O最近的點，故 $\overrightarrow{OP} = (2, 1, 1) \perp L$ ，則

$$(2, 1, 1) \cdot (2, h, k) = 0 \Rightarrow 4 + h + k = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$H \text{的法向量} (1, -1, 1) \cdot (2, h, k) = 0 \Rightarrow 2 - h + k = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$  解得  $k = -3, h = -1$ ，

即L的方向向量為 $\overrightarrow{v} = (2, -1, -3)$ 。

參考公式及可能用到的數值

- 一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 平面上兩點  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  間的距離為  $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過  $(x_1, y_1)$  與  $(x_2, y_2)$  的直線斜率  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$
- 首項為  $a$  且公比為  $r$  的等比數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$
- 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$   
 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$   
 $\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 棣美弗定理：設  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， $n$  為一正整數
- 算術平均數： $M(=\bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$   
(樣本)標準差： $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{X}^2)}$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414; \sqrt{3} \approx 1.732; \sqrt{5} \approx 2.236; \sqrt{6} \approx 2.449; \pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$