

數學 基礎講義

三角測量

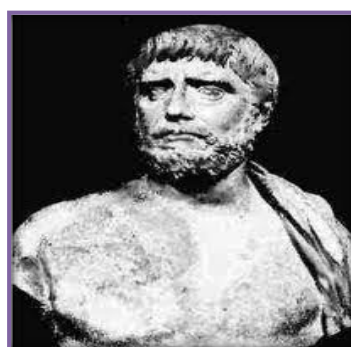
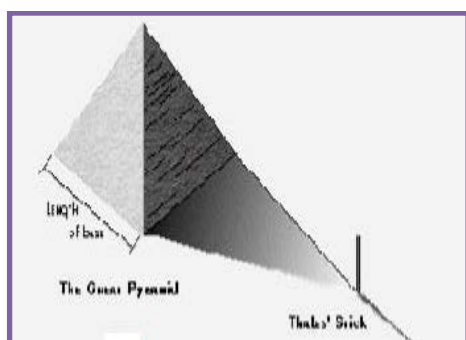
信望愛文教基金會 · 數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

三角測量

大家小的時候不知道有沒有聽過這則寓言故事：從前一個商人帶著一頭驢子運送食鹽，懶惰的驢子每次都會故意跌進河裡讓食鹽隨河水流走，後來聰明的商人為了懲罰他就把它背上的食鹽給換成了棉花，讓驢子被吸了水的棉花壓的喘不過氣。這個故事裡的商人就是希臘有名的數學以及天文學家：泰利斯（Thales），泰利斯年輕時至埃及經商，曾經用相當簡單的方法測量出了金字塔的高度，此舉大大地震驚了當時的法老王。這個例子就是西方有關於測量學最早的紀載。時至今日，如何利用已知的邊角關係輔助測量已經是航海、建築、天文學裡不可或缺的知識。



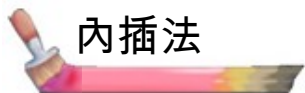
三角函數查表

到目前為止，對於三角函數的性質以及應用我們可以說是已經有了初步通盤的了解。不過很遺憾的是，在現實生活中我們遭遇到的通常不會是教科書上所熟悉的特殊三角形。為此，三角函數表提供了一個近似的數值表讓我們可以更方便地在計算上使用它。

三角函數的查表方法非常簡單且直覺，首先從表左邊找到我們想要找的角度，接著向右對應到該三角函數的函數值。當我們想要知道的是 90° 以內的三角函數值時可以一目了然的從表上看到，甚至是超過 90° 的角度也可以透過之前學過的補角關係轉換至 90° 以內的角度處理。

三角函數表					
角	sin	cos	tan	角	正切
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7103
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7134
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746
17°	0.2924	0.9565	0.3057	62°	0.8829
18°	0.3090	0.9515	0.3249	63°	0.8910
19°	0.3256	0.9463	0.3443	64°	0.8988
20°	0.3420	0.9409	0.3640	65°	0.9063
21°	0.3584	0.9353	0.3839	66°	0.9135
22°	0.3746	0.9295	0.4040	67°	0.9205
23°	0.3907	0.9235	0.4245	68°	0.9272
24°	0.4067	0.9173	0.4452	69°	0.9336
25°	0.4226	0.9109	0.4663	70°	0.9397
26°	0.4384	0.9043	0.4877	71°	0.9455
27°	0.4540	0.8975	0.5095	72°	0.9511
28°	0.4695	0.8905	0.5317	73°	0.9563
29°	0.4848	0.8833	0.5543	74°	0.9613
30°	0.5000	0.8760	0.5774	75°	0.9659
31°	0.5150	0.8685	0.6009	76°	0.9703
32°	0.5299	0.8609	0.6249	77°	0.9744
33°	0.5446	0.8531	0.6494	78°	0.9781
34°	0.5592	0.8450	0.6745	79°	0.9816

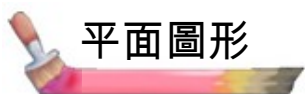
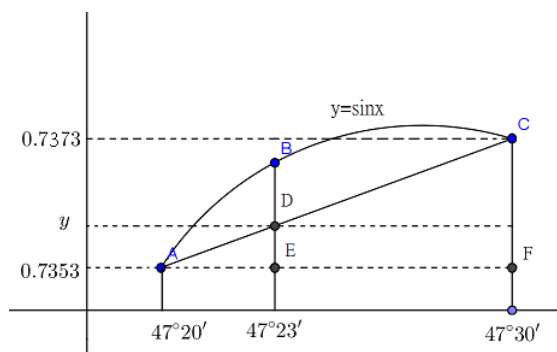
例題	請從表中找出 $\cos 28^\circ$ 以及 $\sin 167^\circ$ 的函數值
ANS	在這裡我們僅擷取部分需要使用到的三角函數表。 $\cos 28^\circ$ 由於其角度屬於銳角，故其對應之函數值可以直接由表中看出為 0.8829。 至於 $\sin 167^\circ$ 我們藉由補角關係知道 $\sin 167^\circ = \sin 13^\circ = 0.2250$



內插法

關於三角函數的內插法，其作法與高一所學之指對數的內插法相同，都是利用線性函數逼近非線性函數與相似三角形對應邊成比例的性質而來。

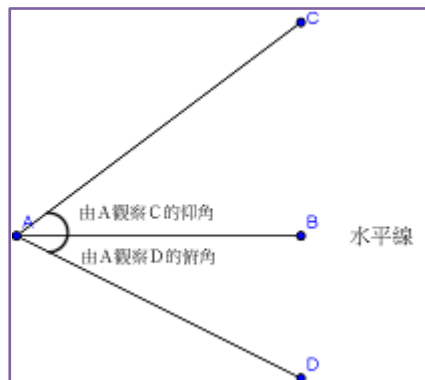
例題	已知 $\sin 47^\circ 20' = 0.7353$ $\sin 47^\circ 30' = 0.7373$ 欲求 $\sin 47^\circ 23' = ?$
ANS	由於 $y = \sin x$ 是一個非線性函數，對於未給定的函數值我們無從判斷其正確數值，所以我們選擇用 $\overline{AC}$ 來逼近函數在 A 點到 C 點間真實的行為。 從圖中可以看到 $\sin 47^\circ 23'$ 應該是 B 點的 y 值，但我們以 D 點的 y 值來作為其近似值，其中的差距 $\overline{BD}$ 在 Δx 很小的時候是可以忽略的。 利用 $\triangle ADE \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$ $\Rightarrow \frac{3}{y - 0.7353} = \frac{10}{0.002}$ $\Rightarrow y = 0.7359$



平面圖形

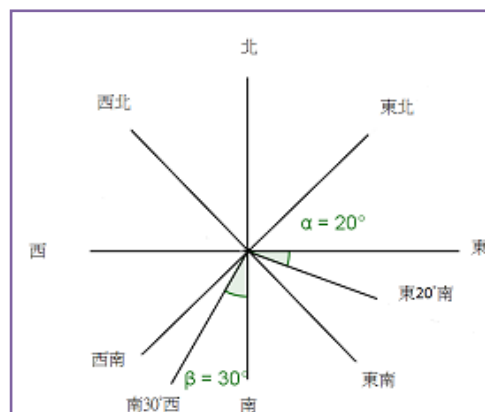
測量常用專有名詞：

鉛垂線	物體到地心的連線
水平線	與鉛垂線垂直的直線
視線	觀測者眼睛與物體的連線
仰角	仰視時觀測者視線與水平線之夾角
俯角	俯視時觀測者視線與水平線之夾角



方位

方位是用以描述觀測者與目標物間相對方向的工具。除了常用東、南、西、北、東北、東南、西北、西南以外，我們還可以以「**方位+角度+方位**」的形式來精準得描述其方向。東 20° 南代表由東向南轉 20° 的方向，南 30° 西代表由南向西轉 30° 的方向。

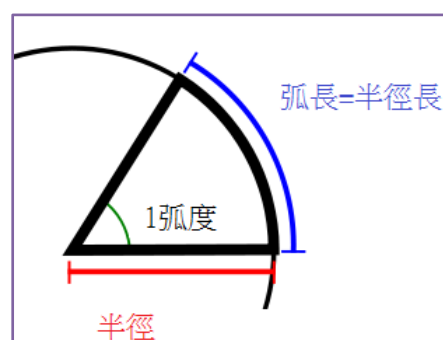


弧度的換算

如果今天你被要求要描述從你的家裡到學校的距離有多遠，你可以有幾種表達的方法呢？

你可能會說是800公尺、或是0.8公里、甚至你也可以說是從學校到郵局距離的兩倍，之所以會存在這些敘述上的差別，原因就是使用的單位不同所致。同樣的，關於角度我們也有不同的單位制度可以表示。

在過去的學習過程中接觸關於角度的單位主要是以角度制來表示（ 30° 90° 120° ），這裡將要介紹一個不同的角度制稱為弧度制：



關於如何定義單位弧度我們必須從圓上出發，在圓上作一個圓心角使得它所對應的弧長等於圓的半徑，這時我們就稱這個圓心角的角度為1弧度（radian），而在實作上當角度以弧度給出時單位通常省去不寫，或是簡記為rad。

關於角度跟弧度的換算方法我們可以用以下過程輕鬆的了解。國中的知識告訴我們一個圓的圓周長 $S=2\pi r$ （ r 為半徑），以及圓心角的角度會正比於其所對的弧長。綜合上述兩樣已知可以得到一整個圓的圓周是半徑 r 的 2π 倍，所以它所對應的圓心角角度也會是1弧度的 2π 倍，換言之 $360^\circ = 2\pi$ 弧度， $1\text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57.2957^\circ$

小試身手

例題1	一旗桿立於塔頂上，某人站在平地上一點 A 朝塔頂望去，測得仰角為 45° ，桿頂的仰角是 60° ，此人向塔走近 20 公尺後測得塔頂的仰角是 60° ，假設此人身高不計，則旗桿長度為何？
例題2	某船以每小時20公里之速度向東 37° 南航行，於上午八點時測得燈塔之方向為東 53° 北，至同日 t 時測得該塔之方向為北 23° 西，此時船與燈塔距離為 $40\sqrt{3}$ 公里，令 m 表示上午八點時船與燈塔的距離，則 $t = ?$ $m = ?$
例題3	有一人由南往北行走，在 A 點處測得一建築物 C 在其北 45° 東的方向，前進 $100\sqrt{6}$ 公里後於 B 點處測得 C 在其北 75° 東的方向，試求 $\overline{AC} = ?$ 如果此人保持同方向繼續行走途中與該建築物最近距離為？
例題4	一汽艇在湖上延直線前進，岸上某人用儀器測得汽艇在其正前方偏左 50° ，距離200公尺，一分鐘後於原地在測，知汽艇駛至正前方偏右 70° ，距離為300公尺，請問此汽艇在這一分鐘內行駛了多少公尺？
例題5	設在塔的正西方 A 點處及塔的正南方 B 點處分別測得塔頂之仰角為 45° 及 15° ，若 $\overline{AB} = 200$ 公尺，則塔高為？

解答與解析

例題1：如圖所示，設塔高 $\overline{CD}$ 為 x 公尺，則 $\overline{DE} = \frac{x}{\sqrt{3}}$

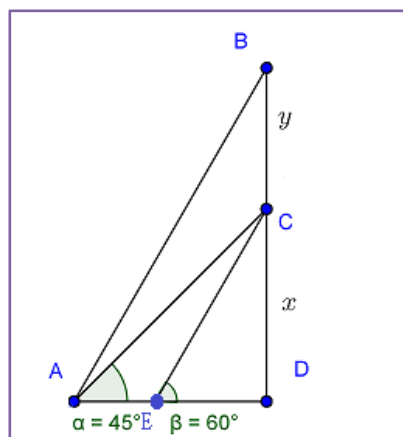
公尺，又已知 $\overline{AE} = 20$ 公尺 $\Rightarrow x = 20 + \frac{x}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow x = 10(3 + \sqrt{3})$$

再設旗桿長度 $\overline{BC} = y$ ，則 $\overline{AD} \times \tan 60^\circ = \overline{BD}$

$$10(3 + \sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 10(3 + \sqrt{3}) + y$$

$$y = 20\sqrt{3}$$



例題2：如圖所示，在 $\triangle ABC$ 中 $\angle CAB = 53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$

$$\angle ABC = 90^\circ - 37^\circ - 23^\circ, \angle ACB = 60^\circ$$

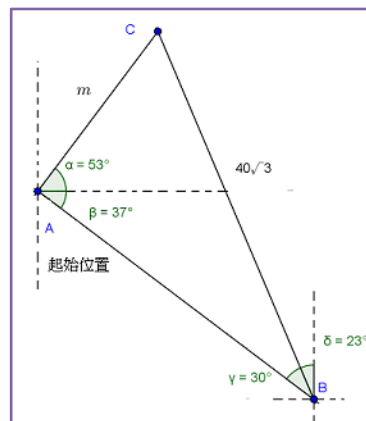
$$\therefore m = \overline{BC} \times \sin 30^\circ = 20\sqrt{3}$$

$$\text{而 } \overline{AB} = \overline{BC} \cos 30^\circ = 60$$

$$\text{故所需時間} = \frac{60}{20} = 3 \text{ 小時}$$

$$t = 8 + 3 = 11 \text{ (上午)}$$

$$t = 11 \quad m = 20\sqrt{3}$$



例題3：如圖所示，在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理可得到 $\frac{100\sqrt{6}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin 105^\circ}$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \frac{100\sqrt{6}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 100(3 + \sqrt{3})$$

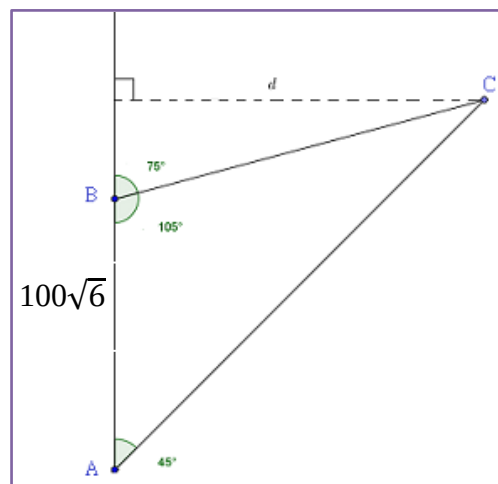
點到直線最短路徑為垂直距離

$$d = \overline{AC} \times \sin 45^\circ$$

$$= 100(3 + \sqrt{3}) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 50(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

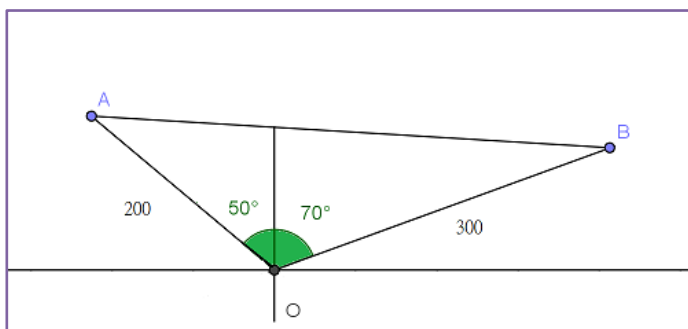
$$\text{註：} \sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$



例題4：假設 A ， B 分別是前後兩次測量點，

由餘弦定理可以得知

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\overline{AO} \times \overline{BO} \times \cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \times 200 \times 300 \times (-\frac{1}{2})} \\ &= 100\sqrt{19}\end{aligned}$$



例題5：設塔高為 h 公尺，

在 $\triangle ACD$ 中， $\overline{AC}=h$

在 $\triangle BCD$ 中， $\overline{BC}=(2+\sqrt{3})h$

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$

$$\therefore \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\Rightarrow h^2 + ((2+\sqrt{3})h)^2 = 200^2$$

$$(8+4\sqrt{3})h^2 = 200^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{200}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} = \frac{200}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}} = \frac{200}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

