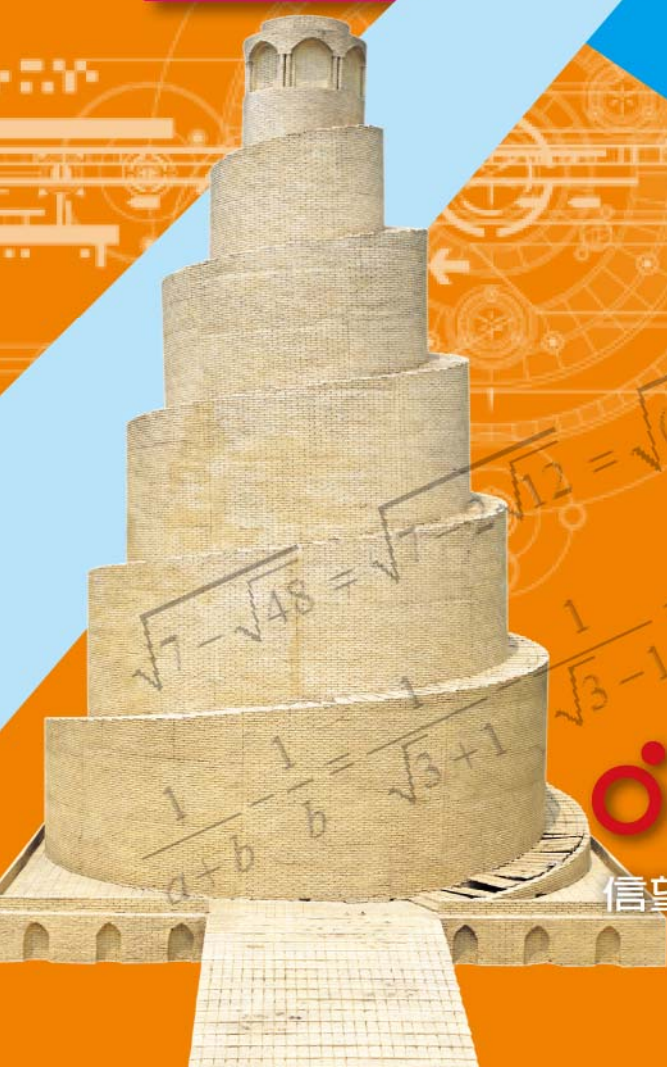


數學 3

進階
講義

向量的內積

成功高中 · 陳冠宏 老師



信望愛文教基金會

10-2-1 向量的內積



1. 向量的夾角

若 $\vec{a}, \vec{b}$ 為兩非零向量，我們可以將它們平移，使其始點重合，此時它們的夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)，稱為 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夾角

2. 向量的內積

當 $\vec{a}, \vec{b}$ 兩向量夾角為 θ 時，我們稱 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積，記為 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。其中 $|\vec{b}|\cos\theta$ 稱為 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影量。故內積可視為(投影量) $\times$ (被投向量長)

3. 內積的運算性質

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

(3) 投影量相等 $\Rightarrow$ 內積相等

$$(4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(5) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(6) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

4. 內積的坐標表示

設 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

5. 內積與夾角

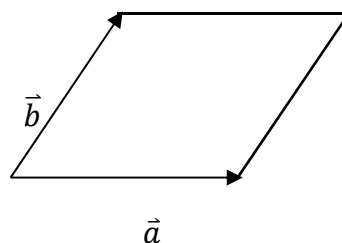
設 $\vec{a}, \vec{b}$ 兩向量夾角為 θ ，則 $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

若 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，則 $\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

6. 面積公式

已知兩不平行的向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，則 $\vec{a}, \vec{b}$ 向量所圍成之平行四邊形面積，

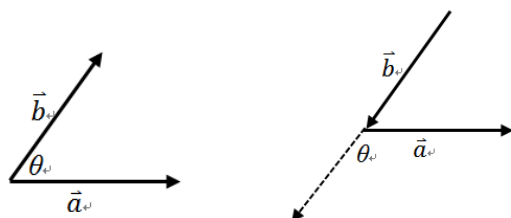
$$\text{面積} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$



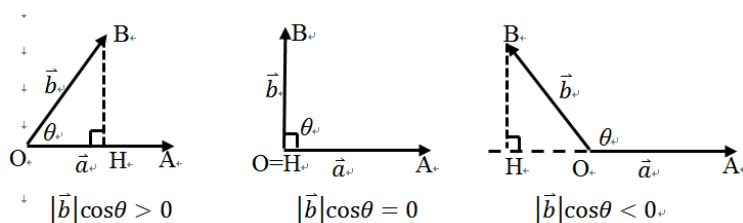
定理證明或說明

1. 向量的夾角

如下列兩圖， θ 為 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夾角



2. 向量的內積



如上圖， $|\vec{b}|\cos\theta$ 為 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影量

$$0^\circ < \theta < 90^\circ : |\vec{b}|\cos\theta > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\theta = 90^\circ : |\vec{b}|\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ : |\vec{b}|\cos\theta < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

3. 內積的運算性質

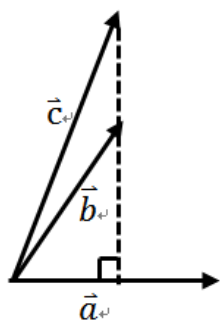
$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

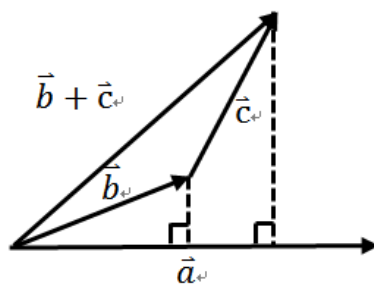
$$(3) \text{如下圖一，} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(4) \text{如下圖二，} (\vec{b} + \vec{c} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 上的投影量}) = (\vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 上的投影量}) + (\vec{c} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 上的投影量})$$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



圖一



圖二

$$\begin{aligned}
 (5) |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

(6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 表 $\vec{a}, \vec{b}$ 夾角 $\theta = 90^\circ$, 故 $\vec{a} \perp \vec{b}$

4. 內積的坐標表示

$\vec{a} = (x_1, y_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = (x_2, y_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, 其中

$\vec{i} = (1, 0)$ 為 x 軸方向的單位向量

$\vec{j} = (0, 1)$ 為 y 軸方向的單位向量

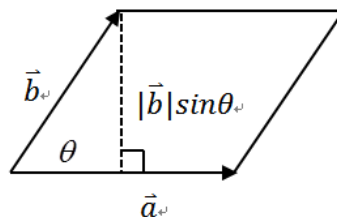
且 $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ ($\because \vec{i} \perp \vec{j}$)

$$\begin{aligned}
 \text{則 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \\
 &= x_1x_2\vec{i} \cdot \vec{i} + x_2y_1\vec{j} \cdot \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + x_2y_2\vec{j} \cdot \vec{j} \\
 &= x_1x_2|\vec{i}|^2 + y_1y_2|\vec{j}|^2 = x_1x_2 + y_1y_2
 \end{aligned}$$

5. 面積公式

如圖, $\vec{a}, \vec{b}$ 所圍平行四邊形的面積為

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta &= |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
 &= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta} \\
 &= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}
 \end{aligned}$$



關鍵字

內積、向量夾角

例題 1

已知 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 7$, 試求: (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans: (1) 19 (2) -6

解:

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A = 5 \times 7 \times \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 7} = 19$$

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(180^\circ - \angle B)$$

$$= 5 \times 6 \times \left(-\frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} \right) = -6$$

例題 2

已知 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ ，且 $\vec{a}, \vec{b}$ 夾角為 60° ，試求 $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : $6\sqrt{3}$

解：

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + 9|\vec{b}|^2 = 36 + 36 + 36 = 108 \\ \therefore |2\vec{a} + 3\vec{b}| &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

例題 3

設 $\vec{OA} = (3,1), \vec{OB} = (-1,2)$ ，若 $\vec{OC} \perp \vec{OB}, \vec{BC} // \vec{OA}$ ，且 $\vec{OD} + \vec{OA} = \vec{OC}$ ，試求 $\vec{OD} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : (11,6)

解：

$$\begin{aligned} \text{設 } \vec{OC} &= (x, y), \vec{BC} = (x+1, y-2) \\ \vec{OC} \perp \vec{OB} &\Rightarrow (x, y) \cdot (-1, 2) = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0 \\ \vec{BC} // \vec{OA} &\Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} \\ \therefore (x, y) &= (14, 7) \\ \vec{OD} &= \vec{OC} - \vec{OA} = (11, 6) \end{aligned}$$

例題 4

已知 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ，且 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$ ，試求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 $\underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 0°

解：

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |-\vec{c}|^2 \\ &\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \\ &\Rightarrow 1 + 2 \times 1 \times 2 \times \cos\theta + 4 = 9 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ \end{aligned}$$

例題 5

已知 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ ，且 $\vec{a}, \vec{b}$ 夾角為 60° ，試求 $\vec{a}, \vec{b}$ 所圍平行四邊形的面積為_____

Ans : $3\sqrt{3}$

解：

$$\text{面積} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{9 \times 4 - (3 \times 2 \times \cos 60^\circ)^2} = 3\sqrt{3}$$

例題 6

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 2\sqrt{7}, \overline{CA} = 4, \overline{AB} = 6$ ， O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ， $(x, y \in \mathbb{R})$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : $x = \frac{4}{9}, y = \frac{1}{6}$

解：

$\because$ 外心 O 為中垂線的交點

$$\therefore \overrightarrow{AO} \text{ 在 } \overrightarrow{AB} \text{ 上的投影量為 } \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \Rightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\text{同理，} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 \\ \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 \\ x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 \end{cases}$$

$$\text{其中 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 \times \frac{6^2 + 4^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 6 \times 4} = 12$$

$$\therefore \begin{cases} 36x + 12y = 18 \\ 12x + 16y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{9}, y = \frac{1}{6}$$

例題 7

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 2\sqrt{7}, \overline{CA} = 4, \overline{AB} = 6$ ， H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，若 $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ， $(x, y \in \mathbb{R})$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : $x = \frac{1}{9}, y = \frac{2}{3}$

解：

$\because$ 垂心 H 為高的交點

$\therefore \overrightarrow{AH}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影量 = $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影量 $\Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

同理, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

其中 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 \times \frac{6^2 + 4^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 6 \times 4} = 12$

$$\therefore \begin{cases} 36x + 12y = 12 \\ 12x + 16y = 12 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{9}, y = \frac{2}{3}$$



習題 1

已知正 $\triangle ABC$ 邊長為 4, 試求(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 2

設 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |2\vec{a} + 3\vec{b}| = 6\sqrt{3}$, 則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 $\underline{\hspace{2cm}}$

習題 3

有一 $\triangle ABC$, 已知 $\overrightarrow{AB} = (-3, 4), \overrightarrow{CA} = (5, -12)$, 則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$

習題 4

設 $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 且 $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2$, 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 之夾角為 60° , 則 $|\vec{c}| = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 5

ABC 中, $\overline{BC} = 2\sqrt{7}$, $\overline{CA} = 4$, $\overline{AB} = 6$, 外心 O , $\overline{AO}$ 交 $\overline{BC}$ 於 P 且 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 求數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 6

設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 6\sqrt{2}, \overline{AC} = 8$, 則 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 7

【學測 93】

設 $\triangle ABC$ 為一等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ，若 P, Q 為斜邊 $\overline{BC}$ 的三等分點，則 $\tan \angle PAQ =$ _____（化成最簡分數）

習題 8

【學測 103】

設 $\vec{u}, \vec{v}$ 為兩個長度皆為 1 的向量，若 $\vec{u} + \vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 的夾角為 75° ，則 $\vec{u}, \vec{v}$ 的內積為_____（化為最簡根式）

習題 9

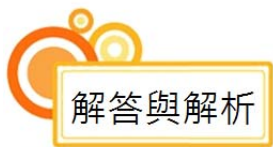
【指考甲 95】

設 $\vec{u}, \vec{v}$ 為兩非零向量。若 $|\vec{u}| = 2|\vec{v}| = |2\vec{u} + 3\vec{v}|$ ，且 θ 表 $\vec{u}, \vec{v}$ 之夾角，則 $\cos \theta =$ _____（化成最簡分數）

習題 10

【學測 102】

令 $\vec{A}, \vec{B}$ 坐標平面上兩向量，已知 $\vec{A}$ 的長度為 1， $\vec{B}$ 的長度為 2，且 $\vec{A}, \vec{B}$ 之間的夾角為 60° 。令 $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}, \vec{v} = x\vec{A} + y\vec{B}$ ，其中 x, y 為實數且符合 $6 \leq x + y \leq 8$ 以及 $-2 \leq x - y \leq 0$ ，則內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 的最大值為_____



習題 1：(1)8；(2)-8

習題 2： 120°

習題 3：8

習題 4： $4\sqrt{3}$

習題 5： $(\frac{8}{11}, \frac{3}{11})$

習題 6：4

習題 7： $\frac{3}{4}$

解：建立直角坐標系： $A(0,0)$ ， $B(0,1)$ ， $C(1,0)$ ，

因為 P ， Q 為 $\overline{BC}$ 的三等分點，所以 $P(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ， $Q(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ，

$$\overrightarrow{AP} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \overrightarrow{AQ} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\cos \angle PAQ = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}|} = \frac{4}{5},$$

又因 $\angle PAQ$ 為銳角，所以 $\tan \angle PAQ = \frac{3}{4}$

習題 8： $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解：

$\because |\vec{u}| = |\vec{v}| \therefore \vec{u} + \vec{v}$ 平分 $\vec{u}, \vec{v}$ 夾角

推得 $\vec{u}, \vec{v}$ 的夾角為 150° 。

$$\text{故 } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 \times \cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

習題 9： $-\frac{7}{8}$

解：令 $|\vec{u}| = 2|\vec{v}| = |2\vec{u} + 3\vec{v}| = 2k$

$$\text{又 } |2\vec{u} + 3\vec{v}|^2 = 4|\vec{u}|^2 + 12|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta + 9|\vec{v}|^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 4 \times 4k^2 + 12 \times 2k^2 \cos\theta + 9k^2$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-21k^2}{24k^2} = \frac{-7}{8}$$

習題 10： 31

$$\text{解： } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (x\vec{A} + y\vec{B}) = x|\vec{A}|^2 + (x+y)\vec{A} \cdot \vec{B} + y|\vec{B}|^2$$

$$= x + 4y + (x+y) \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2x + 5y$$

另外，不等式 $6 \leq x+y \leq 8$ 、 $-2 \leq x-y \leq 0$

在坐標平面上為一封閉四邊形區域，其頂點為 $(2,4)$ 、 $(3,3)$ 、 $(4,4)$ 、 $(3,5)$

由線性規劃之頂點法可得 $2x+5y$ 最大值為 31

故所求 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 之最大值為 31