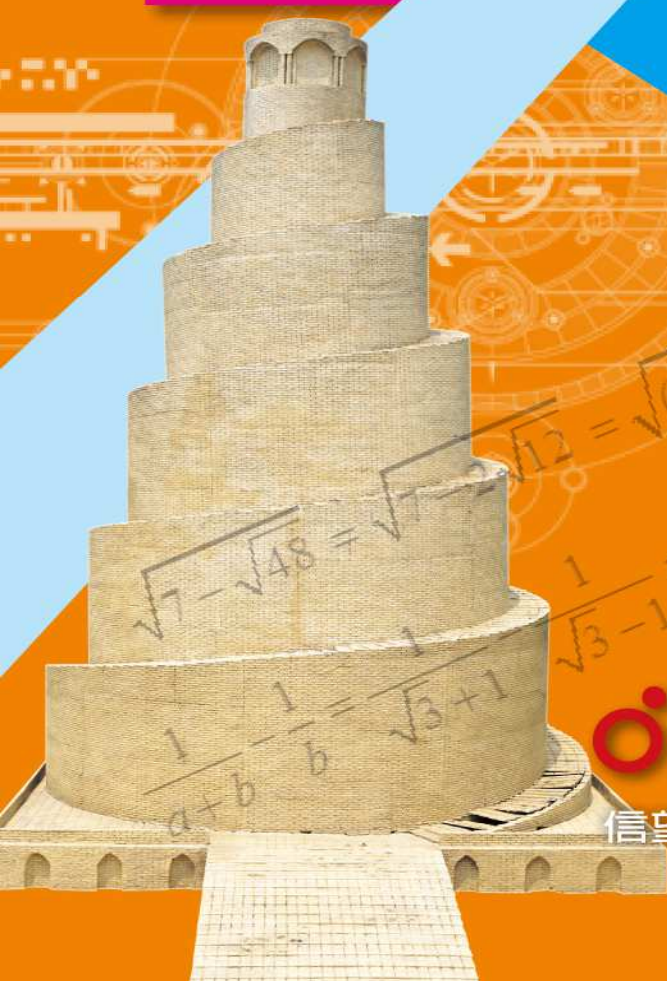


# 高中數學

進階  
講義

## 數線上的幾何

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\div$

## ok112 數線上的幾何

### 1. 兩點距離公式與分點公式

設點  $A$  與點  $B$  的坐標分別為  $a$  與  $b$ ， $m, n$  為正數。

(1)  $A$  與  $B$  的距離  $\overline{AB} = |a - b|$ 。

(2) 若  $P$  點在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，則  $P$  點坐標為  $\frac{mb + na}{m + n}$ 。

**【範例 1】**

數線上兩點  $A(-3)$ ,  $B(7)$  .

(1) 求  $\overline{AB}$  的長 .

(2) 求  $\overline{AB}$  的中點坐標 .

(3) 已知  $P(x)$  點在  $\overline{AB}$  上, 且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ , 求  $x$  .

(4) 已知  $Q(y)$  點為  $\overline{AB}$  外一點, 且  $\overline{AQ} : \overline{BQ} = 3 : 5$ , 求  $y$  .

**Ans :** (1) 10 , (2) 2 , (3) 3 , (4) -18

**【詳解】**

(1)  $\overline{AB} = |(-3) - 7| = |-10| = 10$  .

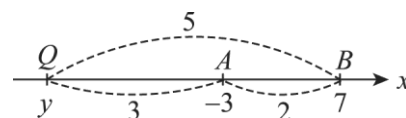
(2)  $\overline{AB}$  的中點坐標為  $\frac{(-3)+7}{2} = 2$  .

(3)  $P(x)$  點在  $\overline{AB}$  上, 根據分點公式

$$x = \frac{3 \times 7 + 2 \times (-3)}{3 + 2} = \frac{15}{5} = 3 .$$

(4)  $Q(y)$  點為  $\overline{AB}$  外一點, 依題意作圖如下, 得

$$\overline{AQ} : \overline{AB} = 3 : 2 .$$



根據分點公式, 得  $-3 = \frac{3 \times 7 + 2 \times y}{3 + 2}$  ,

整理得  $-15 = 21 + 2y$ , 故  $y = -18$  .

**【演練 1】**

數線上兩點  $A(2)$ ,  $B(5)$ , 已知數線上一點  $P(x)$ , 且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ , 求  $x$  .

**Ans :**  $\frac{19}{5}$  或 11

**【詳解】**

若  $P(x)$  點在  $\overline{AB}$  上, 則  $x = \frac{3 \times 5 + 2 \times 2}{3 + 2} = \frac{19}{5}$  .

若  $P(x)$  點在  $\overline{AB}$  外, 則  $\overline{AB} : \overline{BP} = 1 : 2$ ,  $5 = \frac{1 \times x + 2 \times 2}{1 + 2}$ , 得  $x = 11$  .

故  $x = \frac{19}{5}$  或 11 .

**【範例 2】**

設  $a, b$  為實數，且  $a < b$ ，下列何者正確？

- (1)  $a < \frac{a+b}{2} < b$  ,                      (2)  $a < \frac{a+2b}{3} < \frac{2a+b}{3} < b$  ,  
 (3)  $a < \frac{a+b}{3} < b$  ,                      (4)  $a < \frac{3a+2b}{5} < \frac{2a+3b}{5} < b$  .

Ans : (1)(4)

**【詳解】**

- (1) 正確 .  $\frac{a+b}{2}$  為  $a, b$  中點 .  
 (2) 錯誤 .  $\frac{2a+b}{3} - \frac{a+2b}{3} = \frac{a-b}{3} < 0$  .  
 (3) 錯誤 . 如  $a=1, b=2 \Rightarrow \frac{a+b}{3} = 1 = a$  .  
 (4) 正確 .  $\frac{3a+2b}{5}$  與  $\frac{2a+3b}{5}$  均為  $a, b$  間之五等分點 .

答案為(1)(4) .

**【演練 2】**

設  $a < b$ ，比較下列各數的大小：

$$P = \frac{a+b}{2}, \quad Q = \frac{a+3b}{4}, \quad R = \frac{3a+b}{4}, \quad S = \frac{5a+3b}{8} .$$

Ans :  $R < S < P < Q$

**【詳解】**

$$P = \frac{a+b}{2} = \frac{4a+4b}{8}, \quad Q = \frac{a+3b}{4} = \frac{2a+6b}{8}, \quad R = \frac{3a+b}{4} = \frac{6a+2b}{8}, \quad S = \frac{5a+3b}{8},$$

$$\text{因為 } a < b, \text{ 所以 } \frac{6a+2b}{8} < \frac{5a+3b}{8} < \frac{4a+4b}{8} < \frac{2a+6b}{8},$$

故  $R < S < P < Q$  .

## 2. 絕對值

1. 若數線上點  $A$  的坐標為  $x$ ，我們以  $|x|$  來表示  $A$  與原點的距離。

2. 若點  $A$  與點  $B$  的坐標分別為  $a$  與  $b$ ，則  $\overline{AB} = |a - b|$ 。

3. 設  $k$  為正實數。

$$(1) \quad |x| = k \Leftrightarrow x = \pm k .$$

$$(2) \quad |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k .$$

$$(3) \quad |x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \text{ 或 } x \leq -k .$$

**【範例 3】**

解下列各式：

$$(1) |x| = \frac{5}{2}, \quad (2) \left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}, \quad (3) \left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}, \quad (4) |2x+1| > 5.$$

$$\text{Ans : (1) } \pm \frac{5}{2}, (2) 2 \text{ 或 } -3, (3) -3 \leq x \leq 2, (4) x > 2 \text{ 或 } x < -3$$

**【詳解】**

$$(1) |x| = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{2}.$$

$$(2) \left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } -3.$$

$$(3) \left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -3 \leq x \leq 2.$$

$$(4) |2x+1| > 5 \Rightarrow 2x+1 > 5 \text{ 或 } 2x+1 < -5 \Rightarrow x > 2 \text{ 或 } x < -3.$$

**【演練 3】**

解下列各式：

$$(1) |3x-1| = 5, \quad (2) |-x+2| < 4, \quad (3) \left|2x + \frac{1}{3}\right| \geq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ans : (1) } -\frac{4}{3} \text{ 或 } 2, (2) -2 < x < 6, (3) x \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{5}{6}$$

**【詳解】**

$$(1) |3x-1| = 5 \Rightarrow 3x-1 = \pm 5 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ 或 } 2.$$

$$(2) |-x+2| < 4 \Rightarrow |x-2| < 4 \Rightarrow -4 < x-2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 6.$$

$$(3) \left|2x + \frac{1}{3}\right| \geq \frac{4}{3} \Rightarrow 2x + \frac{1}{3} \geq \frac{4}{3} \text{ 或 } 2x + \frac{1}{3} \leq -\frac{4}{3} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{5}{6}.$$

**【範例 4】**

解下列各不等式：

$$(1) \begin{cases} |x-2| < 6 \\ |x| > 3 \end{cases}, \quad (2) 2 < |-x+1| < 5.$$

Ans : (1)  $-4 < x < -3$  或  $3 < x < 8$  , (2)  $-4 < x < -1$  或  $3 < x < 6$

【詳解】

$$(1) \quad |x-2| < 6 \Rightarrow -6 < x-2 < 6 \Rightarrow -4 < x < 8,$$

$$|x| > 3 \Rightarrow x > 3 \text{ 或 } x < -3,$$

聯立不等式的解為  $x$  的共同範圍,

故  $-4 < x < -3$  或  $3 < x < 8$  .

$$(2) \quad \text{因為 } |-x+1| > 2, \text{ 所以 } -x+1 > 2 \text{ 或 } -x+1 < -2,$$

因此  $x < -1$  或  $x > 3$  .

$$\text{因為 } |-x+1| < 5, \text{ 所以 } -5 < -x+1 < 5,$$

因此  $-4 < x < 6$  .

故  $x$  的共同範圍為  $-4 < x < -1$  或  $3 < x < 6$  .

【演練 4】

解下列各不等式：

$$(1) \quad \begin{cases} |2x-1| < 5 \\ |x+1| \geq 2 \end{cases}, \quad (2) \quad 5 \leq |2x-3| < 9 .$$

Ans : (1)  $1 \leq x < 3$  , (2)  $-3 < x \leq -1$  或  $4 \leq x < 6$

【詳解】

$$(1) \quad |2x-1| < 5 \Rightarrow -5 < 2x-1 < 5 \Rightarrow -4 < 2x < 6 \Rightarrow -2 < x < 3,$$

$$|x+1| \geq 2 \Rightarrow x+1 \geq 2 \text{ 或 } x+1 \leq -2 \Rightarrow x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3,$$

聯立不等式的解為  $x$  的共同範圍,

故  $1 \leq x < 3$  .

$$(2) \quad 5 \leq |2x-3| < 9 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \left| x - \frac{3}{2} \right| < \frac{9}{2},$$

$x$  是數線上與  $\frac{3}{2}$  的距離大於或等於  $\frac{5}{2}$  , 且小於  $\frac{9}{2}$  的所有點,

故  $-3 < x \leq -1$  或  $4 \leq x < 6$  .

**【範例 5】**

設  $a, b$  為實數，且不等式  $|ax-1| \leq b$  的解為  $-1 \leq x \leq 7$ ，求  $a, b$  的值。

$$\text{Ans : } a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$$

**【詳解】**

因為  $-1 \leq x \leq 7$ ，且  $-1$  與  $7$  的中點為  $3$ ，所以  $-4 \leq x-3 \leq 4$ ，

$$\text{因此 } |x-3| \leq 4 \Rightarrow \left| \frac{1}{3}x-1 \right| \leq \frac{4}{3}.$$

$$\text{故 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}.$$

**【演練 5】**

設  $a, b$  為實數，且不等式  $|ax-1| \leq b$  的解為  $-2 \leq x \leq 12$ ，求  $a, b$  的值。

$$\text{Ans : } a = \frac{1}{5}, b = \frac{7}{5}$$

**【詳解】**

因為  $-2 \leq x \leq 12$ ，且  $-2$  與  $12$  的中點為  $5$ ，所以  $-7 \leq x-5 \leq 7$ ，

$$\text{因此 } |x-5| \leq 7 \Rightarrow \left| \frac{1}{5}x-1 \right| \leq \frac{7}{5}.$$

$$\text{故 } a = \frac{1}{5}, b = \frac{7}{5}.$$

**【範例 6】**

設  $a, b$  為實數，且不等式  $|ax+5| > 6$  的解為  $x < -1$  或  $x > 6$ ，求  $a, b$  的值。

$$\text{Ans : } a = -2, b = 7$$

**【詳解】**

因為  $x < -1$  或  $x > 6$ ，且  $-1$  與  $6$  的中點為  $\frac{5}{2}$ ，

$$\text{所以 } x - \frac{5}{2} < -\frac{7}{2} \text{ 或 } x - \frac{5}{2} > \frac{7}{2},$$

$$\text{故 } \left| x - \frac{5}{2} \right| > \frac{7}{2} \Rightarrow |2x-5| > 7 \Rightarrow |-2x+5| > 7.$$

$$\text{得 } a = -2, b = 7.$$

**【演練 6】**

設  $a, b$  為實數，且不等式  $|ax+3| \geq b$  的解為  $x \leq -1$  或  $x \geq 7$ ，求  $a, b$  的值。

Ans :  $a = -1, b = 4$

**【詳解】**

因為  $x \leq -1$  或  $x \geq 7$ ，且  $-1$  與  $7$  的中點為  $3$ ，

所以  $x-3 \leq -4$  或  $x-3 \geq 4$ ，

故  $|x-3| \geq 4 \Rightarrow |-x+3| \geq 4$ 。

得  $a = -1, b = 4$ 。

**【範例 7】**

解方程式  $|2x+1| + |x-3| = 5$ 。

Ans :  $1$  或  $-1$

**【詳解】**

將  $|2x+1|=0$  及  $|x-3|=0$  的解  $x = -\frac{1}{2}$  和  $x=3$  標示在數線上，

分段討論如下：

(1) 當  $x < -\frac{1}{2}$  時， $2x+1 < 0$ ， $x-3 < 0$ ，

方程式為  $-(2x+1)-(x-3)=5$ ，

解得  $x = -1$ 。

(2) 當  $-\frac{1}{2} \leq x < 3$  時， $2x+1 \geq 0$ ， $x-3 < 0$ ，

方程式為  $(2x+1)-(x-3)=5$ ，

解得  $x = 1$ 。

(3) 當  $x \geq 3$  時， $2x+1 \geq 0$ ， $x-3 \geq 0$ ，

方程式為  $(2x+1)+(x-3)=5$ ，

解得  $x = \frac{7}{3}$ （不合），故此範圍內無解。

綜合(1)(2)(3)得： $x = 1$  或  $-1$ 。

**【演練 7】**

解方程式  $2|x+1| - |x+2| = 3$  .

Ans : 3 或 -3

**【詳解】**

將  $|x+1|=0$  及  $|x+2|=0$  的解  $x=-1$  和  $x=-2$  標示在數線上,

分段討論如下:

(1) 當  $x < -2$  時,  $x+1 < 0$ ,  $x+2 < 0$ ,

方程式為  $-2(x+1) + (x+2) = 3$ , 解得  $x = -3$  .

(2) 當  $-2 \leq x < -1$  時,  $x+1 < 0$ ,  $x+2 \geq 0$ ,

方程式為  $-2(x+1) - (x+2) = 3$ ,

解得  $x = -\frac{7}{3}$  (不合), 故此範圍內無解 .

(3) 當  $x \geq -1$  時,  $x+1 \geq 0$ ,  $x+2 \geq 0$ ,

方程式為  $2(x+1) - (x+2) = 3$ , 解得  $x = 3$  .

綜合(1)(2)(3)得:  $x = 3$  或  $-3$  .

**【範例 8】**

解不等式  $|x-1| + |x+3| \leq 5$  .

Ans :  $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

**【詳解】**

先將  $|x-1|=0$  及  $|x+3|=0$  的解  $x=1$  和  $x=-3$  標示在數線上,

然後分段討論如下:

(1) 當  $x < -3$  時,  $x-1 < 0$  且  $x+3 < 0$ ,

不等式為  $(-x+1) + (-x-3) \leq 5$ ,

得  $x \geq -\frac{7}{2}$ , 故  $-\frac{7}{2} \leq x < -3$  為不等式的解 .

(2) 當  $-3 \leq x < 1$  時,  $x-1 < 0$  且  $x+3 \geq 0$ ,

不等式為  $(-x+1)+x+3 \leq 5$ ,

得  $x$  是任意實數, 故  $-3 \leq x < 1$  為不等式的解.

(3) 當  $x \geq 1$  時,  $x-1 \geq 0$  且  $x+3 > 0$ ,

不等式為  $x-1+x+3 \leq 5$ ,

得  $x \leq \frac{3}{2}$ , 故  $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$  為不等式的解.

綜合(1)(2)(3), 得:  $x$  的範圍為  $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

### 【演練 8】

解不等式  $|x+2| + 2|x-4| \leq 15$ .

Ans:  $-3 \leq x \leq 7$

#### 【詳解】

將  $|x+2|=0$  及  $|x-4|=0$  的解  $x=-2$  和  $x=4$  標示在數線上,

分段討論如下:

(1) 當  $x < -2$  時,  $x+2 < 0$ ,  $x-4 < 0$ ,

不等式為  $-(x+2)-2(x-4) \leq 15$ ,

解得  $x \geq -3$ , 故  $-3 \leq x < -2$ .

(2) 當  $-2 \leq x < 4$  時,  $x+2 \geq 0$ ,  $x-4 < 0$ ,

不等式為  $x+2-2(x-4) \leq 15$ ,

解得  $x \geq -5$ , 故  $-2 \leq x < 4$ .

(3) 當  $x \geq 4$  時,  $x+2 \geq 0$ ,  $x-4 \geq 0$ ,

不等式為  $x+2+2(x-4) \leq 15$ ,

解得  $x \leq 7$ , 故  $4 \leq x \leq 7$ .

綜合(1)(2)(3)得:  $-3 \leq x \leq 7$ .

### 【範例 9】

設  $a, b$  為實數, 試證明  $|a+b| \leq |a| + |b|$ .

#### 【證明】

因為  $|a+b|$  和  $|a|+|b|$  都是非負實數，所以只需證明

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 \text{ 即可。}$$

將左右兩式分別展開：

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2,$$

又因為  $ab \leq |ab|$ ，所以  $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ ，

$$\text{故 } |a+b| \leq |a|+|b|.$$

### 【演練 9】

設  $a, b$  為實數，試證明  $|a-b| \leq |a|+|b|$ 。

#### 【證明】

將左右兩式的平方分別展開：

$$|a-b|^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2,$$

又因為  $-ab \leq |ab|$ ，所以  $|a-b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ ，

$$\text{故 } |a-b| \leq |a|+|b|.$$

## ok112ex

### 基礎題

1. 設  $a, b$  為有理數，且  $a < b$ ，則下列哪一個數最大？

(1)  $\frac{a+b}{2}$  , (2)  $\frac{a+2b}{3}$  , (3)  $\frac{2a+b}{3}$  , (4)  $\frac{3a+2b}{5}$  .

Ans : (2)

【詳解】

取  $a=1, b=3 \Rightarrow$  (1)  $2$  , (2)  $\frac{7}{3}$  , (3)  $\frac{5}{3}$  , (4)  $\frac{9}{5}$  , (2)  $\frac{7}{3}$  最大。

$$(1) \quad \frac{a+b}{2} - \frac{a+2b}{3} = \frac{3a+3b-2a-4b}{6} = \frac{a-b}{6} < 0 ,$$

$$\text{故 } \frac{a+b}{2} < \frac{a+2b}{3} .$$

$$(3) \quad \frac{2a+b}{3} - \frac{a+2b}{3} = \frac{2a+b-a-2b}{3} = \frac{a-b}{3} < 0 ,$$

$$\text{故 } \frac{2a+b}{3} < \frac{a+2b}{3} .$$

$$(4) \quad \frac{3a+2b}{5} - \frac{a+2b}{3} = \frac{9a+6b-5a-10b}{15} = \frac{4(a-b)}{15} < 0 ,$$

$$\text{故 } \frac{3a+2b}{5} < \frac{a+2b}{3} .$$

2. 數線上兩點  $A(-2)$  ,  $B(13)$  , 已知數線上一點  $P(x)$  ,

且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$  , 求  $x$  .

Ans : 7 或 43

【詳解】

$$(1) \text{ 內分點 } \Rightarrow x = -2 + (13 + 2) \times \frac{3}{5} = 7 ,$$

$$(2) \text{ 外分點 } \Rightarrow x = 13 + (13 + 2) \times 2 = 43 .$$

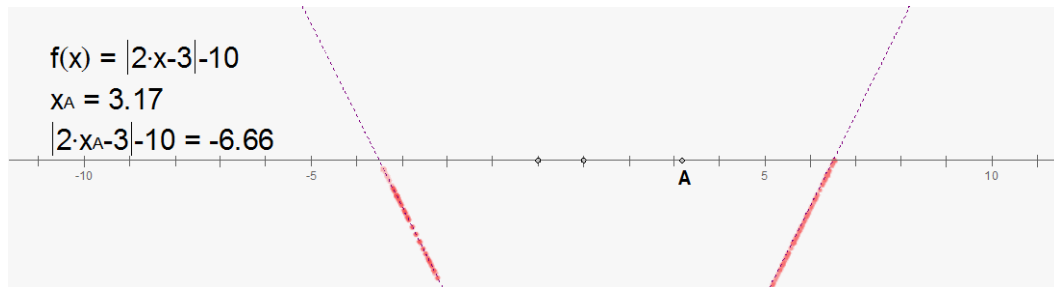
3.  $x$  為正整數，滿足  $|2x-3| < 10$  之解共有幾個？

Ans : 6

【詳解】

$$|2x-3| < 10 \Rightarrow -10 < 2x-3 < 10 \Rightarrow -7 < 2x < 13 \Rightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6。$$



4. 設  $x$  為實數，若同時滿足  $|x-3| \leq 2$ ， $|x-1| \leq 3$  之  $x$  的範圍可以

寫成  $|x-a| \leq b$ ，求數對  $(a, b)$ 。

Ans :  $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

【詳解】

$$|x-3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \dots (1),$$

$$|x-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \dots (2)$$

$$\text{由(1)(2)取共同解得 } 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow |x - \frac{5}{2}| \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } a = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}。$$

5. 設  $a, b$  都是實數，若  $|2x-a| \leq b$  的解為  $-1 \leq x \leq 9$ ，求數對  $(a, b)$ 。

Ans : (8, 10)

【詳解】

$$-1 \leq x \leq 9 \Rightarrow |x-4| \leq 5 \Rightarrow |2x-8| \leq 10, \Rightarrow a = 8, b = 10。$$

6. 設  $a, b$  均為實數，若  $|ax+4|>b$  的解為  $x<-2$  或  $x>6$ ，求  $a+b$ 。

Ans : 6

【詳解】

$$\begin{aligned} x < -2 \text{ 或 } x > 6 &\Rightarrow |x-2| > 4 \Rightarrow |2x-4| > 8 \Rightarrow |-2x+4| > 8 \\ &\Rightarrow a = -2, b = 8 \Rightarrow a+b = 6. \end{aligned}$$

### 進階題

7. 解不等式  $\begin{cases} |x-3| < 5 \\ |-x+1| \geq 2 \end{cases}$ 。

Ans :  $-2 < x \leq -1$  或  $3 \leq x < 8$

【詳解】

$$\begin{aligned} |x-3| &< 5 \\ \Rightarrow -5 < x-3 < 5 &\Rightarrow -2 < x < 8 \dots (1), \\ |-x+1| &\geq 2 \\ \Rightarrow |x-1| &\geq 2 \\ \Rightarrow x-1 \geq 2 \text{ 或 } x-1 \leq -2 &\Rightarrow x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1 \dots (2) \\ \text{由(1)(2)得 } &-2 < x \leq -1 \text{ 或 } 3 \leq x < 8. \end{aligned}$$

8. 解不等式  $|2x-2| \leq |3-x|$ 。

Ans :  $-1 \leq x \leq \frac{5}{3}$

【詳解】

$|2x-2| \leq |x-3|$ ，分段討論如下：

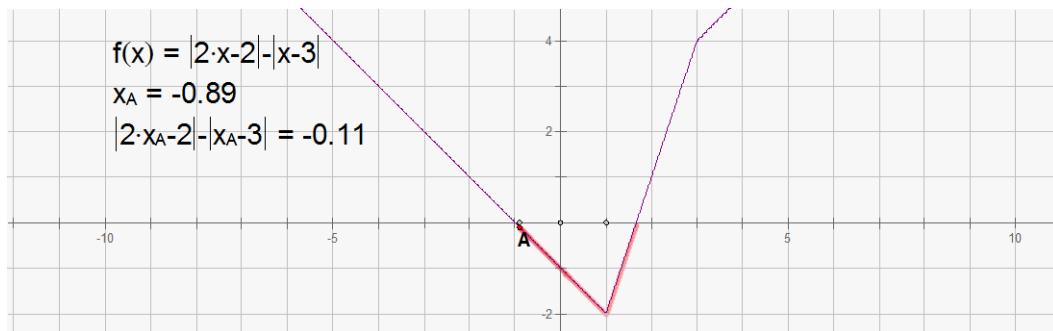
$$(1) \quad x \geq 3 \Rightarrow 2x-2 \leq x-3 \Rightarrow x \leq -1, \text{ 不合。}$$

$$(2) \quad 1 < x < 3 \Rightarrow 2x-2 \leq 3-x$$

$$\Rightarrow 3x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{3} \Rightarrow 1 < x \leq \frac{5}{3}.$$

$$(3) \quad x \leq 1 \Rightarrow 2-2x \leq 3-x \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{由(1)(2)(3)得 } -1 \leq x \leq \frac{5}{3}.$$



9. 設  $x$  為實數，且  $|x-1| + |x-2| = 5$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

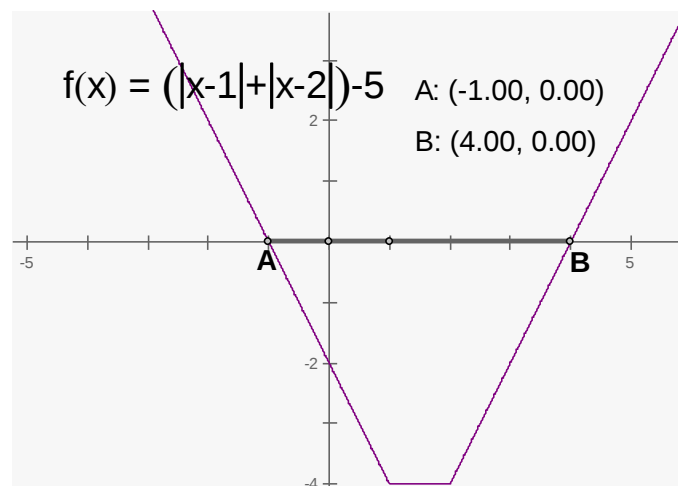
Ans : -1 或 4

【詳解】

$|x-1| + |x-2| = 5$ ，分段討論如下：

- (1)  $x \geq 2 \Rightarrow x-1+x-2=5 \Rightarrow x=4$ 。
- (2)  $1 < x < 2 \Rightarrow x-1+2-x=5 \Rightarrow 1=5$  (矛盾)。
- (3)  $x \leq 1 \Rightarrow 1-x+2-x=5 \Rightarrow x=-1$ 。

得  $x = -1$  或  $x = 4$ 。



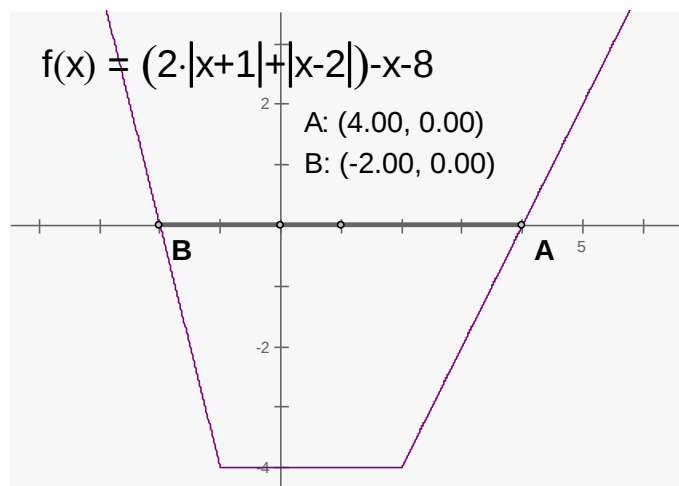
10. 解方程式  $2|x+1| + |x-2| - x = 8$ 。

Ans : -2 或 4

【詳解】

- (1)  $x \geq 2 \Rightarrow 2(x+1) + (x-2) - x = 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ 。
- (2)  $-1 < x < 2 \Rightarrow 2(x+1) + (2-x) - x = 8 \Rightarrow 4 = 8$ ，矛盾。
- (3)  $x \leq -1 \Rightarrow -2(x+1) + (2-x) - x = 8 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$ 。

故得  $x = -2$  或  $x = 4$ 。



11. 請問滿足絕對值不等式  $|4x - 12| \leq 2x$  的實數  $x$  所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？ (bc103)

(1) 1，(2) 2，(3) 3，(4) 4，(5) 6。

Ans : (4)

【詳解】

$$x \geq 3 \Rightarrow 4x - 12 \leq 2x \Rightarrow 2x \leq 12 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow 3 \leq x \leq 6$$

$$x < 3 \Rightarrow 12 - 4x \leq 2x \Rightarrow 6x \geq 12 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

由上取聯集得  $2 \leq x \leq 6$ ，

其長度為 4。

【另解】

$$|4x - 12| \leq 2x$$

$$\Rightarrow (2x - 6)^2 \leq x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 6) \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 6$$

其長度為  $6 - 2 = 4$ 。

