



B3 3-1 因式分解



概念 ① 用除法判別因式和倍式



一、因數與倍數

(1) 2 是不是 16 的因數？

(2) 5 是不是 16 的因數？

二、因式和倍式

(1) $(x+1)$ 是不是 (x^2+3x+2) 的因式？

(2) $(x+4)$ 是不是 (x^2+3x+2) 的因式？

☆筆記



如果正整數 A 、 B 、 C 都不是 0



如果多項式 A 、 B 、 C 都不是 0



牛刀小試 ①

1. (1) 15 是不是 24 的因數？

(2) 20 是不是 5 的倍數？

(3) 32 是不是 6 的倍數？

2. (1) 12 是不是 12 的因數？

(2) 12 是不是 12 的倍數？

(3) 1 是不是 13 的因式？

3. (1) $(x+2)$ 是不是 (x^2+6x+8) 的因數嗎？

(2) $(x-3)$ 是不是 (x^2+6x+9) 的因數嗎？

4. (1) $(x^2+3x-10)$ 是不是 $(x+5)$ 的倍數嗎？

(2) $(x^2+2x-24)$ 是不是 $(x-6)$ 的倍數嗎？



概念 ② 因式與倍式的意義



(1) $6 \div 2$

(2) $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$

☆筆記

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

請圈出 $(x^2 + 3x + 2)$ 的因式

$$(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

$$1 \cdot (x + 1)(x + 2) \cdot 3$$

$$6 = 2 \times 3 \quad \text{我們說}$$

① 2 和 3 是 6 的_____

② 6 是 2 和 3 的_____

若多項式 A 、 B 、 C 都不為 0

$$A = B \times C$$

⇒ ① B 和 C 是 A 的_____

② A 是 B 和 C 的_____



牛刀小試 ②

1. $(x^2 + 3x + 2) = (x + 2)(x + 1)$

$(x + 2)$ 是 $(x^2 + 3x + 2)$ 的_____式

$(x^2 + 3x + 2)$ 是 $(x + 1)$ 的_____式

2. $(x^2 + 4x + 3) = (x + 1)(x + 3)$

$(x + 1)$ 是 $(x^2 + 4x + 3)$ 的_____式

$(x^2 + 4x + 3)$ 是 $(x + 3)$ 的_____式

3. $(x^2 + 6x + 8) = (x + 4)(x + 2)$

$(x^2 + 6x + 8)$ 是 $(x + 2)$ 的_____式

$(x + 4)$ 是 $(x^2 + 6x + 8)$ 的_____式

4. $(x^2 + 10x + 25) = (x + 5)(x + 5)$

$(x + 5)$ 是 $(x^2 + 10x + 25)$ 的_____式

$(x^2 + 10x + 25)$ 是 $(x + 5)$ 的_____式

5. $x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8)$

請圈出 $x^2 - 9x + 8$ 的因式

$$(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 8) \cdot (x - 8) \cdot$$

$$(x^2 - 9x + 8) \cdot 1 \cdot 8 \cdot (x - 1)(x - 8)$$

6. $2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)(2x + 5)$

請圈出 $2x^2 + 3x - 5$ 的因式

$$(x - 1) \cdot (2x + 5) \cdot (x - 1)(2x + 5) \cdot$$

$$(2x^2 + 3x - 5) \cdot 1 \cdot x \cdot 5 \cdot x^2 \cdot$$



概念 ③ 因式分解的意義



① $2 \times 3 = 6$

② $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

☆筆記

請將 $(x^2 - 5x + 6)$ 因式分解

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x-2 \overline{) x^2 - 5x + 6} \\ \underline{x^2 - 5x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$6 = 2 \times 3$



$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$



☆ 將一個 x 的二次式寫成兩個 x 的一次式乘積，我們稱這的過程為這個二次式的_____。



牛刀小試 ③

- 若 $(x+2)$ 是 $(x^2 - 7x - 18)$ 的因式，請因式分解 $x^2 - 7x - 18$ 。
- 若 $(x+6)$ 是 $(x^2 + 13x + 42)$ 的因式，請因式分解 $x^2 + 13x + 42$ 。
- 若 $(x-2)$ 是 $(x^2 + 6x - 16)$ 的因式，請因式分解 $x^2 + 6x - 16$ 。
- 若 $(x+3)$ 是 $(x^2 - 4x - 21)$ 的因式，請因式分解 $x^2 - 4x - 21$ 。



例題 ① 因式分解的意義



若 $6x^2+x-5$ 可以被因式分解為 $(2x-3)(ax+b)$ ，則 a 和 b 的值是多少？

☆筆記



牛刀小試 4

1. 若 $12x^2+5x-2$ 可以被分解為 $(3x+2)(ax+b)$ ，則 a 和 b 值各為多少？

2. 若 $30x^2-x-1$ 可以被分解為 $(5x-1)(ax+b)$ ，則 a 和 b 的值各為多少？

3. 若 $2x^2-x-6$ 可以被分解為 $(2x+a)(bx-2)$ ，則 a 和 b 的值各為多少？

4. 若 $3x^2+16x+5$ 可以被分解為 $(x+a)(bx+1)$ ，則 a 和 b 的值各為多少？

5. 若 $4x^2+10x+6$ 可以被分解為 $(2x+a)(bx+3)$ ，則 a 和 b 的值各為多少？



◎像 $A \times B$ 和 $A \times C$ 這樣子的多項式，我們說
A 是他們的_____。

〈例〉

① 6 和 10

② $2x$ 和 x^2

③ $3(x+1)$ 和 $(x+1)^2$

☆筆記

①公因數是否只有一個？

②公因式是否只有一個？



牛刀小試 5

1. 下列各多項式中，哪些是 $2x^2$ 和 $6x$ 的公因式？_____。

(A) 2

(B) x

(C) $2x$

(D) $2x^2$

2. 下列各多項式中，哪些是 $3x^2$ 和 $9x$ 的公因式？_____。

(A) 1

(B) 3

(C) x

(D) $3x$

(E) $3x^2$

3. 下列各多項式中，哪些是 $(2x-1)(x+4)$ 和 $(2x-1)(x+5)$ 的公因式？

_____。

(A) $x+4$

(B) $x+5$

(C) $2x-1$

(D) $2x+1$

4. 下列各多項式中，哪些是 $(2x+1)^2$ 和 $(2x+1)(x+5)$ 的公因式？

_____。

(A) $2x$

(B) $2x+1$

(C) $(2x+1)^2$

(D) $(2x+1)(x+5)$

5. 下列各多項式中，哪些是 $(3x+1)(x+7)$ 和 $(3x+1)^2$ 的公因式？

_____。

(A) x

(B) $3x+1$

(C) $x+7$

(D) $(3x+1)(x+7)$



概念 ⑤ 利用提出公因式做因式分解



◎原理

$$A \times B + C =$$

$$\Rightarrow A \times B + A \times C =$$

〈例〉

① $ax + bx$

② $x^2 - 2x$

③ $3a^2 + 6a$

☆筆記



牛刀小試 6

1. 利用提出公因式做因式分解

(1) $ax - bx$

(2) $x^2 + x$

(3) $7x^2 + 8x$

(4) $9x^2 - 4x$

(5) $8x^2 - x$

2. 利用提出公因式做因式分解

(1) $2ax + 4bx$

(2) $3x^2 - 15x$

(3) $7x^2 + 14x$

(4) $5a^2 - 10a$

(5) $4x - 8x^2$



例題 ② 提出公因式練習 1



(1) $x(3x-2)-x(x+1)$

(2) $a(1-2a)+a(3a+5)$

☆筆記



牛刀小試 7

1. 因式分解下列各式

(1) $x^2+x(x+1)$

(2) $3x^2+x(x-1)$

(3) $4x^2+x(2x+3)$

(4) $x(x+1)+x(2x-3)$

(5) $x(4x-3)+x(x-5)$

2. 因式分解下列各式

(1) $x^2-x(2x-1)$

(2) $4x^2-x(x+1)$

(3) $3x^2-x(2x-5)$

(4) $x(2x+5)-x(3-3x)$

(5) $x(3x-4)-x(2x+5)$



例題 ③ 提出公因式練習 2



(1) $(x-2)(x+3) + (x+2)(x-2)$ (2) $(2x-5)^2 - (2x-5)(3x-1)$

☆筆記



牛刀小試 8

1. 因式分解下列各式

(1) $x(x-1) + 2(x-1)$

(2) $x(3x+2) - 5(3x+2)$

(3) $4x(x+5) - (x+5)(3x+2)$

(4) $(7x+3)(4x+5) + (2x-5)(4x+5)$

(5) $(4x-3)(2x+3) - (x-2)(2x-3)$

2. 因式分解下列各式

(1) $(3x-4)^2 - (3x-4)$

(2) $(2x-5)^2 - 2(2x-5)$

(3) $2(x-3)^2 - (x-3)$

(4) $(2x-3)^2 + (2x-3)(x+1)$

(5) $(3x-2)^2 - (2x-3)(3x-2)$



概念

⑥ $a-b$ 和 $b-a$ 差多少？問題： $(a-b)$ 和 $(b-a)$ 一樣嗎？

① $3-2=$

② $a-b$ 和 $b-a$ 一樣嗎？為什麼？

$2-3=$

☆ $(3-2)=$

☆ $a-b$ 和 $b-a$ 差多少？

整理：

$(a-b)=$ _____

$(a-b)^{\text{奇}}=$ _____

$(a-b)^2=$ _____

$(a-b)^{\text{偶}}=$ _____

☆筆記



牛刀小試 9

1. 請在空格中填入適當的符號

(1) $+(2-x)=\square(x-2)$

(2) $-(3-4x)=\square(4x-3)$

(3) $+5(2-3x)=\square 5(3x-2)$

(4) $-x(5-3x)=\square x(3x-5)$

(5) $+(x-2)(4-5x)=\square(x-2)(5x-4)$

2. 請在空格中填入適當的符號

(1) $+(2-x)^2=\square(x-2)^2$

(2) $+(2-x)^3=\square(x-2)^3$

(3) $+5(2-3x)^2=\square 5(3x-2)^2$

(4) $-x(2-5x)^2=\square x(5x-2)^2$

(5) $+(x-2)(2-5x)^2=\square(x-2)(5x-2)^2$



例題 4 先變號再提出公因式



(1) $(3x-4)(2x+1)+(4-3x)(x-5)$ (2) $(2-3x)^2+(6x-4)$

☆筆記



牛刀小試 10

1. 因式分解下列各式

(1) $x(x-1)-(1-x)$

(2) $2x(x-2)+(2-x)$

(3) $3x(2x-1)+(1-2x)(x-3)$

(4) $(3x-2)(x-7)+(2x-1)(7-x)$

(5) $(4x-1)(5x-2)+(3x+2)(2-5x)$

2. 因式分解下列各式

(1) $(3-4x)^2+(8x-6)$

(2) $(1-2x)^2+(8x-4)$

(3) $(7x-3)^2+5x(3-7x)$

(4) $(2x-5)^2-(x-6)(5-2x)$

(5) $(3x-2)^2+(2-3x)(x+5)$



◎原理 平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

 $a^2-b^2=$ _____ 稱為 _____

〈例〉因式分解

① x^2-4

② $9x^2-16$

☆筆記

(1) ① $9=$ _____

② $16=$ _____

③ $25=$ _____

(2) ① $9x^2=$ _____

② $16x^2=$ _____

③ $25x^2=$ _____



牛刀小試 11

1. a^2-9

6. $36x^2-49$

2. x^2-16

7. $64x^2-9$

3. y^2-25

8. $81x^2-25$

4. c^2-100

9. $9x^2-1$

5. x^2-49

10. $25x^2-49$



例題 ⑤ 先提公因式再利用平方差公式



因式分解下列各式

(1) $2a^2 - 8$

(2) $-18x^2 + 50$

(3) $(x+1)^2 - 9$

☆筆記



牛刀小試 12

1. $5x^2 - 20$

2. $36x^2 - 100$

3. $28a^2 - 63$

4. $-12x^2 + 27$

5. $-24x^2 + 6$

6. $(x+1)^2 - 4$

7. $(2x+3)^2 - 64$

8. $16 - (x+2)^2$

9. $36 - (2x-3)^2$

10. $(5x-3)^2 - (x-2)^2$



概念 ⑧ 利用和或差的平方公式做因式分解



◎原理

和的平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

差的平方公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

① $a^2 + 2ab + b^2 =$ _____

② $a^2 - 2ab + b^2 =$ _____

☆筆記

〈例〉因式分解下列各式

1. ① $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (\quad)^2$ 2. ① $x^2 + 6x + 9 =$

② $x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (\quad)^2$ ② $x^2 - 10x + 25 =$



牛刀小試 13

1. 因式分解下列各式

(1) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (\quad)^2$

(2) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = (\quad)^2$

(3) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = (\quad)^2$

(4) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 = (\quad)^2$

(5) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 9 + 81 = (\quad)^2$

2. 因式分解下列各式

(1) $x^2 + 10x + 25$

(2) $x^2 + 16x + 64$

(3) $x^2 + 20x + 100$

(4) $x^2 - 24x + 144$

(5) $x^2 - 12x + 36$

**例題****6****利用和或差的平方公式做因式分解**

因式分解下列各式

(1) $9x^2 + 12x + 4$

(2) $16x^2 - 8x + 1$

(3) $2x^2 + 12x + 18$

☆筆記

**牛刀小試 14**

1. 因式分解下列各式

(1) $4x^2 + 4x + 1$

(2) $9x^2 + 12x + 4$

(3) $4y^2 - 20y + 25$

(4) $25y^2 - 30y + 9$

(5) $16y^2 - 24y + 9$

2. 因式分解下列各式

(1) $3x^2 + 12x + 12$

(2) $2x^2 + 24x + 72$

(3) $3y^2 - 30y + 75$

(4) $5y^2 - 20y + 20$

(5) $4y^2 - 8y + 4$



牛刀小試 1

- (1)否；(2)是；(3)否
- (1)是；(2)是；(3)是
- (1)是；(2)不是
- (1)是；(2)不是

牛刀小試 2

- 因；倍
- 因；倍
- 倍；因
- 因；倍
- $(x-1)$ 、 $(x-8)$ 、 (x^2-9x+8) 、 1 、 8 、 $(x-1)(x-8)$
- $(x-1)$ 、 $(2x+5)$ 、 $(x-1)(2x+5)$ 、 1 、 $(2x^2+3x-5)$ 、 1 、 5

牛刀小試 3

- $(x+2)(x-9)$
- $(x+7)(x+6)$
- $(x+8)(x-2)$
- $(x-7)(x+3)$

牛刀小試 4

- $a=4$ 、 $b=-1$
- $a=6$ 、 $b=1$
- $a=3$ 、 $b=1$
- $a=5$ 、 $b=3$
- $a=2$ 、 $b=2$

牛刀小試 5

- (A)(B)(C)
- (A)(B)(C)(D)
- (C)
- (B)
- (B)

牛刀小試 6

- $x(a-b)$
 - $x(x+1)$
 - $x(7x+8)$
 - $x(9x-4)$
 - $x(8x-1)$
- $2x(a+2b)$
 - $3x(x-5)$
 - $7x(x+2)$
 - $5a(a-2)$
 - $4x(1-2x)$

牛刀小試 7

- $x(2x+1)$
 - $x(4x-1)$
 - $x(6x+3)$ 或 $3x(2x+1)$
 - $x(3x-2)$
 - $x(5x-8)$
- $x(-x+1)$ 或 $-x(x-1)x$
 - $x(3x-1)$
 - $x(x+5)$
 - $x(5x+2)$
 - $x(x-9)$

牛刀小試 8

- $(x-1)(x+2)$
 - $(3x+2)(x-5)$
 - $(x+5)(x-2)$
 - $(4x+5)(9x-2)$
 - $(2x-3)(3x-1)$
- $(3x-4)(3x-5)$
 - $(2x-5)(2x-7)$
 - $(x-3)(2x-7)$
 - $(2x-3)(3x-2)$
 - $(3x-2)(x+1)$

牛刀小試 9

- - +
 -
 - +
 -
- +
 -
 - +
 -
 - +

牛刀小試 10

- $(x-1)(x+1)$
 - $(x-2)(2x-1)$
 - $(2x-1)(2x+3)$
 - $(x-7)(x-1)$
 - $(5x-2)(x-3)$
- $(4x-3)(4x-1)$
 - $(2x-1)(2x+3)$
 - $(7x-3)(2x-3)$
 - $(2x-5)(3x-11)$
 - $(3x-2)(2x-7)$

牛刀小試 11

- $(a-3)(a+3)$
- $(x-4)(x+4)$
- $(y-5)(y+5)$
- $(c-10)(c+10)$
- $(x-7)(x+7)$
- $(6x-7)(6x+7)$
- $(8x-3)(8x+3)$
- $(9x-5)(9x+5)$
- $(3x-1)(3x+1)$
- $(5x-7)(5x+7)$

牛刀小試 12

- $5(x-2)(x+2)$
- $4(3x-5)(3x+5)$
- $7(2a-3)(2a+3)$
- $-3(2x-3)(2x+3)$
- $-6(2x-1)(2x+1)$
- $(x+3)(x-1)$
- $(2x-5)(2x+11)$
- $(x+6)(2-x)$ 或 $(x+6)(-x+2)$
- $(3+2x)(9-2x)$ 或 $(2x+3)(-2x+9)$
- $(6x-5)(4x-1)$

牛刀小試 13

- $(x+4)^2$
 - $(x+6)^2$
 - $(x-7)^2$
 - $(x-8)^2$
 - $(x-9)^2$
- $(x+5)^2$
 - $(x+8)^2$
 - $(x+10)^2$
 - $(x-12)^2$
 - $(x-6)^2$

牛刀小試 14

- $(2x+1)^2$
 - $(3x+2)^2$
 - $(2y-5)^2$
 - $(5y-3)^2$
 - $(4y-3)^2$
- $3(x+2)^2$
 - $2(x+6)^2$
 - $3(y-5)^2$
 - $5(y-2)^2$
 - $4(y-1)^2$