

選修數學

進階

講義

上

三角函數的性質

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

≡

16-1-4 三角函數的性質

定理敘述

1. 若 θ 為標準位置角，且 $P(x,y)$ 為其終邊上一點， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，則定義

$$(1) \text{ 正弦 } \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (2) \text{ 餘弦 } \cos \theta = \frac{x}{r} \quad (3) \text{ 正切 } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$(4) \text{ 餘切 } \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (5) \text{ 正割 } \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (6) \text{ 餘割 } \csc \theta = \frac{r}{y}$$

2. 三角函數的關係

(1) 倒數關係

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

(2) 商數關係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

(3) 餘角關係

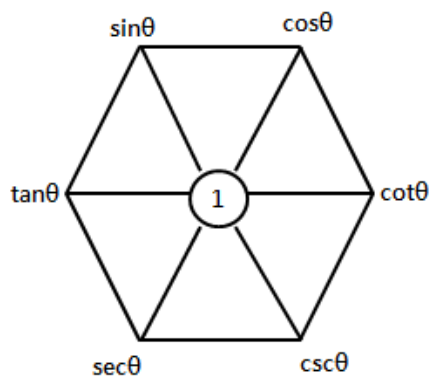
$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta, \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta, \csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

(4) 平方關係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1; \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta; 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



定理證明或說明

◆ 依定義可知上述三角函數的關係

關鍵字

三角函數

例題 1

設 θ 為第四象限角，若 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ ，求 $\cot \theta$ 、 $\sec \theta$ 以及 $\csc \theta$ 之值。

$$\text{Ans : } \cot \theta = -\frac{3}{4}, \sec \theta = \frac{5}{4}, \csc \theta = -\frac{5}{3}$$

$$\text{解 : } \sin \theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}, \text{ 得 } \cot \theta = -\frac{4}{3}, \sec \theta = \frac{5}{4}, \csc \theta = -\frac{5}{3}$$

例題 2

求 $y = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 5$ 之最大值為_____

$$\text{Ans : } 8$$

$$\text{解 : } y = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 5 = (\sin \theta + 1)^2 + 4 \leq (1+1)^2 + 4 = 8$$

例題 3

若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，則 $\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\cot \theta} =$ _____

$$\text{Ans : } \frac{25}{12}$$

$$\text{解 : } \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$$

$$\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\cot \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{25}{12}$$

例題 4

設 θ 為第三象限角，若 $\sec^2 \theta = \tan \theta + 1$ ，求 $\sin \theta$ 之值。

$$\text{Ans : } -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{解 : } \sec^2 \theta = \tan \theta + 3, \text{ 又 } \sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \tan \theta + 3 \Rightarrow \tan^2 \theta - \tan \theta - 2 = 0, \text{ 得 } \tan \theta = 2 \text{ 或 } \tan \theta = -1 \text{ (不合)}$$

$$\text{故得 } \sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

例題 5

設 θ 為銳角，則 $\frac{1}{1+\sin^3 \theta} + \frac{1}{1+\cos^3 \theta} + \frac{1}{1+\sec^3 \theta} + \frac{1}{1+\csc^3 \theta} =$ _____

Ans : 2

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sin^3 \theta} + \frac{1}{1+\cos^3 \theta} + \frac{1}{1+\sec^3 \theta} + \frac{1}{1+\csc^3 \theta} \\ \text{解：} &= \frac{1}{1+\sin^3 \theta} + \frac{1}{1+\cos^3 \theta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\cos^3 \theta}} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^3 \theta}} \\ &= \frac{1}{1+\sin^3 \theta} + \frac{1}{1+\cos^3 \theta} + \frac{\cos^3 \theta}{1+\cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{1+\sin^3 \theta} \\ &= 2 \end{aligned}$$

例題 6


設 θ 為銳角， $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = \frac{13}{25}$ ，則 $\frac{\sin \theta}{1-\cot \theta} + \frac{\cos \theta}{1-\tan \theta} =$ _____

Ans : $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{aligned} \text{解：} \sin^6 \theta + \cos^6 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \\ &= \sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{4}{25} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5} \Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{9}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{所求} \frac{\sin \theta}{1-\cot \theta} + \frac{\cos \theta}{1-\tan \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sin \theta + \cos \theta \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$


 溫故知新

習題 1

設 $y = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 5$ 之最大值為 M 、最小值為 m ，則 $M + m =$ _____

習題 2

求 $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{3} + \tan(-\frac{9\pi}{4}) + \cot \frac{5\pi}{4} + \sec \frac{11\pi}{3} =$ _____

習題 3

已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \sec \theta + \csc \theta =$ _____

習題 4

設 θ 為銳角，試化簡 $\frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1+\tan \theta} + \frac{1}{1+\cot \theta} + \frac{1}{1+\sec \theta} + \frac{1}{1+\csc \theta} =$ _____

習題 5

設 θ 為第三象限角，若 $\csc^2 \theta + \cot \theta = 2(\cot \theta + 1)$ ，求 $\tan \theta$ 之值。

習題 6

若 $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ ，則 $\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cot x} =$ _____

習題 7

【學測 83】

若 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，則 $\cos \theta =$ _____。

習題 8

【學測 83】

設 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ，且 $2 + \sqrt{3}$ 為 $x^2 - (\tan \theta + \cot \theta)x + 1 = 0$ 的一根，則 $\tan \theta =$ _____。

習題 9

【學測 90】

若 $\sin x = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, 則下列選項何者為真?

- (1) $\cos x = \frac{4}{5}$ (2) $\tan x = \frac{3}{4}$ (3) $\cot x = -\frac{4}{3}$ (4) $\sec x = -\frac{5}{4}$ (5) $\csc x = \frac{5}{3}$

習題 10

【學測 93】

若 α, β 是不等於 $\frac{\pi}{2}$ 的正實數, 且 $\alpha + \beta < \pi$, 下列哪些選項恆正?

- (1) $\sin \alpha + \sin \beta$ (2) $\cos \alpha + \cos \beta$ (3) $\tan \alpha + \tan \beta$ (4) $\cot \alpha + \cot \beta$

習題 11

【學測 94】

若 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 試問以下哪些選項恆成立?


- (1) $\sin \theta < \cos \theta$ (2) $\tan \theta < \sin \theta$ (3) $\cos \theta < \tan \theta$ (4) $\sin 2\theta < \cos 2\theta$ (5) $\tan \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \tan \theta$

習題 12

【指考甲 94】

$\frac{\sin 3\theta}{\sec 2\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\csc 2\theta}$ 可化簡為?

- (1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ (3) $\tan \theta$ (4) $\cot \theta$


 解答與解析

習題 1 : 12

習題 2 : 3

習題 3 : $\frac{24}{7}$

習題 4 : 3

習題 5 : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

習題 6 : $\frac{25}{12}$

習題 7 : $\frac{4}{5}$

$$\text{解：} (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{25} = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$$

$$\Rightarrow (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$$

$$\because \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi, \text{ 得 } \sin \theta - \cos \theta = -\frac{7}{5}, \text{ 故 } \cos \theta = \frac{4}{5}$$

習題 8 : $2 - \sqrt{3}$

解：由根與係數，得兩根和為 $\tan \theta + \cot \theta$ ，兩根積為 1

因此方程式之兩根為 $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$

又因 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\tan \theta < 1$ ，故所求為 $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

習題 9 : (3)(4)(5)

解： $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 為第二象限角，

$$\text{得 } \cos x = -\frac{4}{5}, \tan x = -\frac{3}{4}, \sec x = -\frac{5}{4}, \csc x = \frac{5}{3}$$

故選(3)(4)(5)

習題 10 : (1)(2)(4)

解：若 α, β 皆為第一象限角，則皆為正。

因此考慮 α 為第一象限角， β 為第二象限角則 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi - \alpha$

$$(1) \sin \alpha > 0, \sin \beta > 0 \Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta > 0$$

$$(2) \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta > \cos \alpha + \cos(\pi - \alpha) = 0$$

$$(3) \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta < \tan \alpha + \tan(\pi - \alpha) = 0$$

$$(4) \Rightarrow \cot \alpha + \cot \beta > \cot \alpha + \cot(\pi - \alpha) = 0$$

故選(1)(2)(4)

習題 11 : (1)(5)

解：當 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

(1) $\sin \theta < \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} < \cos \theta$ ，所以 $\sin \theta < \cos \theta$ 恆成立

(2) 恆不成立，因為 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > \frac{\sin \theta}{1} = \sin \theta$

(3) 不恆成立，例如： $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{6} > \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$

(4) 不恆成立，例如： $\sin 2 \times \frac{\pi}{6} > \cos 2 \times \frac{\pi}{6}$

(5) $\tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \tan \theta = \tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}\right) < 0$

故選(1)(5)

習題 12 : (1)

$$\text{解：} \frac{\sin 3\theta}{\sec 2\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\csc 2\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\frac{1}{\cos 2\theta}} - \frac{\cos 3\theta}{\frac{1}{\sin 2\theta}} = \sin 3\theta \cos 2\theta - \cos 3\theta \sin 2\theta = \sin(3\theta - 2\theta)$$

$= \sin \theta$ ，故選(1)。