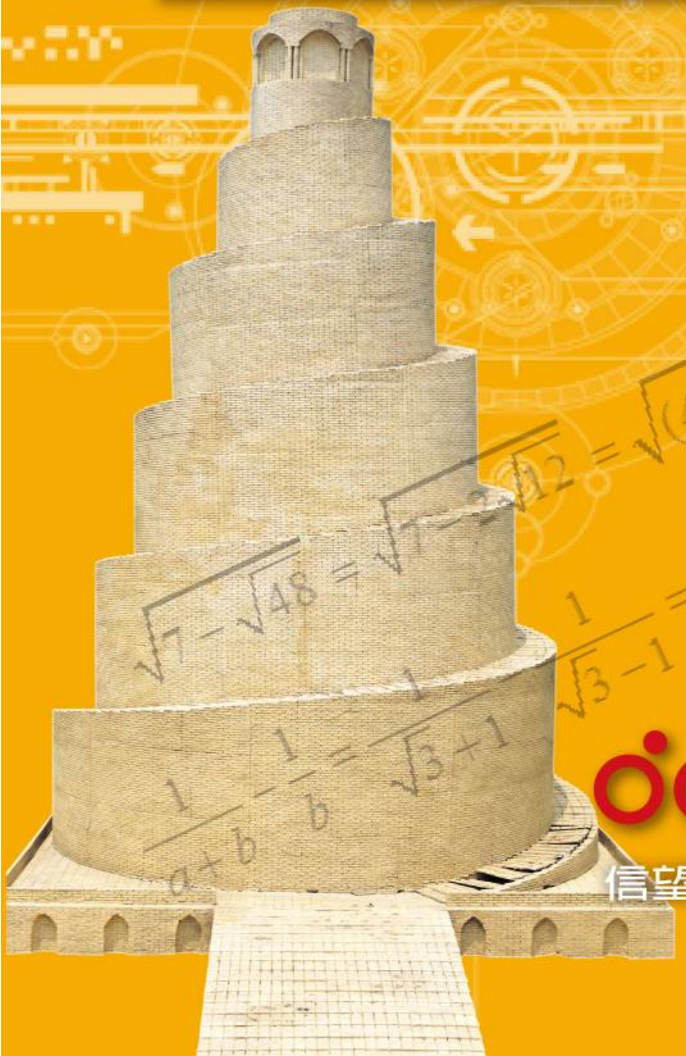
數學 基礎講義

平面向量的内積

信望愛文教基金會．數學種子教師團隊



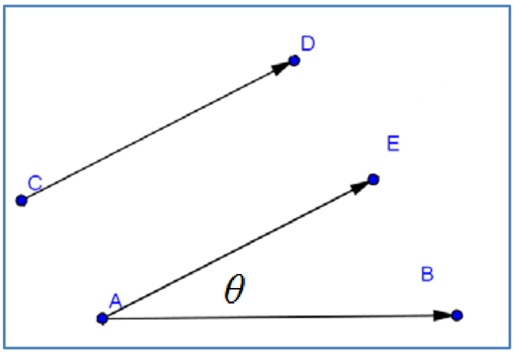
信望愛文教基金會

平面向量的內積

向量的夾角與內積

向量的夾角

坐標平面上給定兩非零向量 $\overrightarrow{AB}$以及$\overrightarrow{CD}$欲求其間之夾角，如圖過 A 點作一向量$\overrightarrow{AE}$使得$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$，定義 $\angle BAE=\theta$ 為$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$的夾角$(0^\circ\leq \theta \leq 180^\circ)$。



向量的內積

若兩非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$之間夾角為θ，則$\vec{a}$、$\vec{b}$之內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。

向量內積之推廣

設$\vec{a}$，$\vec{b}$為兩非零向量，夾角θ，則依照內積的定義我們可以移項得到 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

從內積值判斷夾角：

若$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，則 $\cos\theta>0$，夾角θ為銳角

若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則 $\cos\theta=0$，夾角θ為直角

若$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，則 $\cos\theta<0$，夾角θ為鈍角

向量內積之坐標表示

設坐標平面上兩向量$\vec{a}=(a_1,b_1)$ $\vec{b}=(a_2,b_2)$，θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角，
則$\vec{a}$與$\vec{b}$內積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1a_2+b_1b_2$

Proof

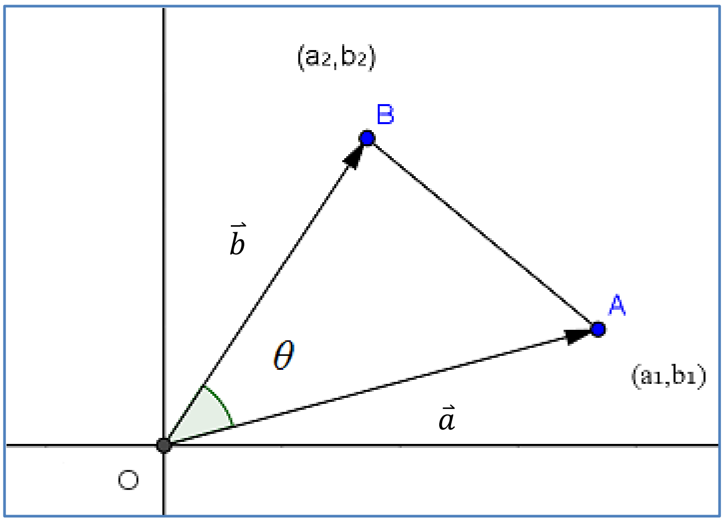
如下圖，設 $\overrightarrow{OA}=(a_1,b_1)$ $\overrightarrow{OB}=(a_2,b_2)$，$\theta$ 為$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$之夾角

$\because\ \overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\theta$ (By 餘弦定理)

$\therefore\ \overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(a_1{}^2+b_1{}^2\right)+\left(a_2{}^2+b_2{}^2\right)-(a_1-a_2)^2-(b_1-b_2)^2\right]$

$=a_1a_2+b_1b_2$



向量以坐標表示時之夾角求法

設坐標平面上兩向量$\vec{a}=(a_1,b_1)$ $\vec{b}=(a_2,b_2)$，θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角

則$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$

向量內積基本性質

設$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$為坐標平平面上任意向量，t為任意實數

向量內積的運算滿足以下性質

1.交換律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2.結合律 $(t\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(t\vec{b})=t(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3.分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

4.$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

向量內積與垂直，平行關係

設坐標平面上兩向量$\vec{a}=(a_1,b_1)$ $\vec{b}=(a_2,b_2)$ 均為非零向量

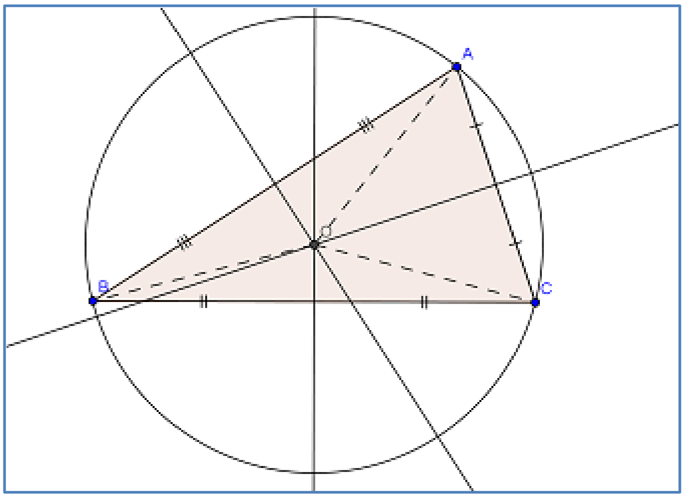
1. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow$ $a_1a_2+b_1b_2=0$

2. $\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow$ 存在一非零實數t，使得$\vec{a}=t\vec{b}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

三角形的外心與垂心

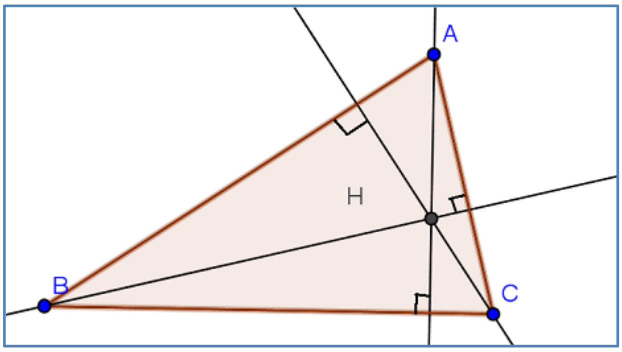
三角形的外心

三角形三邊中垂線的交點，此為三角形外接圓之圓心，稱為外心，如下圖



三角形的垂心

三角形的三高交點即為垂心，如下圖



柯西不等式

向量形式： 設$\vec{a}$，$\vec{b}$為平面上任意兩非零向量，則$|\vec{a}||\vec{b}| \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|$，

即兩向量絕對值之乘積必大於等於其內積之絕對值。

一般形式： 設 $\vec{a}=(a_1, b_1)$，$\vec{b}=(a_2, b_2)$，將上述之向量形式改以坐標表示，

即可得到柯西不等式的一般形式：$\sqrt{(a_1{}^2+b_1{}^2)(a_2{}^2+b_2{}^2)} \geq (a_1a_2+b_1b_2)$

在柯西不等式的應用上，相當值得關注的一點就是等號成立的時機，
從內積公式可以發現：

$\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\therefore\ |\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow |\cos\theta|=1$

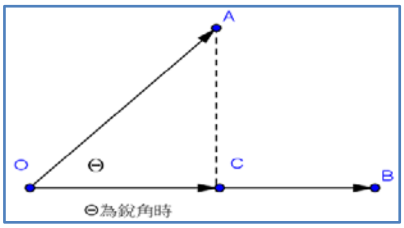
$\Leftrightarrow \theta=0^\circ$ or 180°

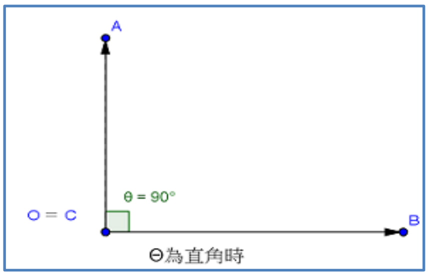
$\Leftrightarrow$ 兩向量$\vec{a}$，$\vec{b}$平行

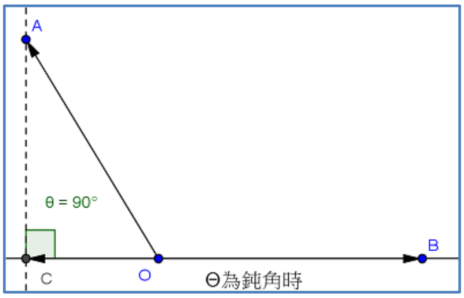
將此結論推廣至坐標形式即可得知柯西不等式以一般形式表示時，
等號將成立於$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ 時（其中$a_2, b_2 \neq 0$）

正射影

設$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$,$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，為平面上兩個非零向量，其夾角為$\theta$，從$A$點像直線$OB$做垂線，
令其垂足為C，如以下之圖所示，我們稱向量$\overrightarrow{OC}$為$\vec{a}$在$\vec{b}$的正射影。





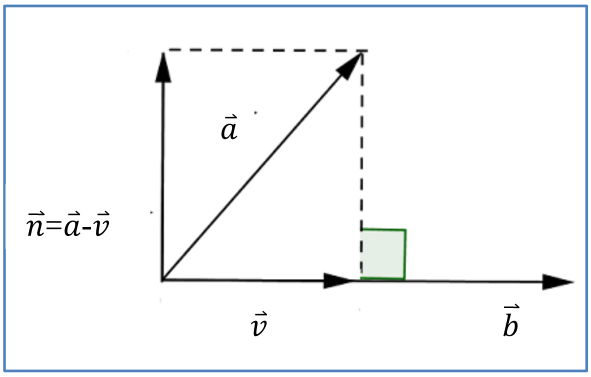


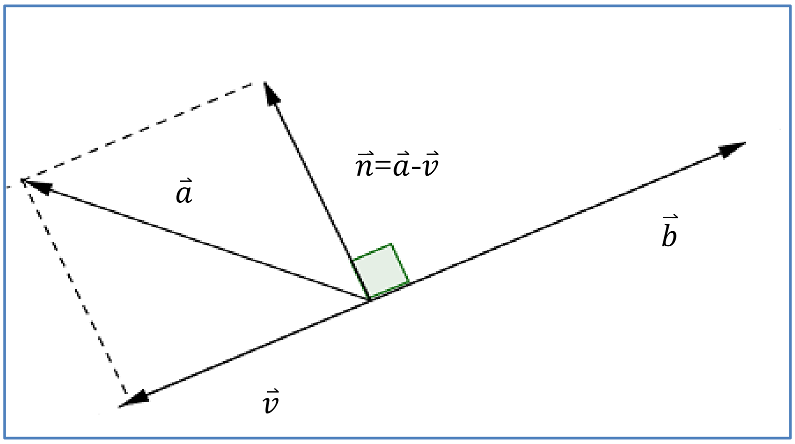
設$\vec{a}$，$\vec{b}$是兩個非零向量，則$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影為$\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$，

其長度$\left|\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}\right|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \left|\,|\vec{a}|\cos\theta\,\right|$

向量的分解

設$\vec{a}$，$\vec{b}$為兩不平行之向量，則$\vec{a}$必可分解為兩個向量$\vec{n}$及$\vec{v}$，其中$\vec{v}$平行$\vec{b}$而$\vec{n}$垂直$\vec{b}$，在這裡$\vec{v}$即為$\vec{a}$在$\vec{b}$的正射影。這個向量分解的技巧將會在物理中的運動學以及力學將會被大量使用，所以務必要熟悉。



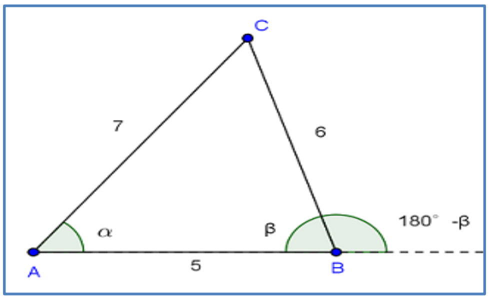


小試身手

例題1	ΔABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$ 試求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$以及 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$
例題2	正 ΔABC 之邊長為 2，D，E 為$\overline{BC}$上之三等分點，則$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=$
例題3	設 O 為 ΔABC 之外心，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=2\sqrt{13}$，$\overline{CA}=8$，試求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$
例題4	設 x，y 皆為實數，若 $4x+5y=41$，則當數對(x,y)=?時，x^2+y^2 會有最小值=？
例題5	設$\vec{a}$，$\vec{b}$均為非零向量，若$\vec{a}$在$\vec{b}$之正射影為$\lvert\vec{b}\rvert$的三倍，且$\vec{b}$在$\vec{a}$之正射影為$\lvert\vec{a}\rvert$的$\frac{1}{6}$倍，求$\vec{a}$，$\vec{b}$之夾角為？
例題6	試將 $\vec{a}=(4,-3)$分解成與向量$\vec{b}=(-1,2)$平行及垂直的兩個向量

解答與解析

例題 1：如右圖，設∠$A=\alpha$，∠$B=\beta$，



則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\times\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$

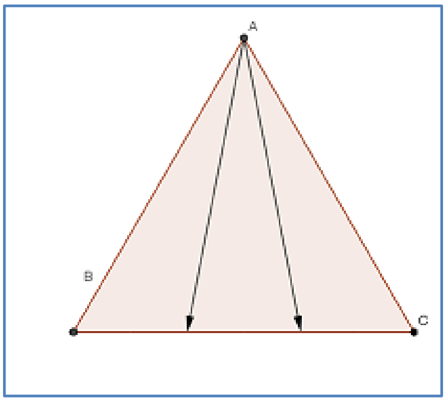
$$=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(25+49-36)=19$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\cos(180^\circ-\beta)=-|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\cos\beta$$

$$=\frac{-1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2\right)=\frac{-1}{2}(25+36-49)=-6$$

例題2：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})$



$$=\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{2}{9}\times4+\frac{5}{9}\times2\times2\times\cos60^\circ+\frac{2}{9}\times4=\frac{26}{9}$$

例題3：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\times\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$

$$=\frac{36+64-52}{2}=24$$

例題4：由柯西不等式可知，$(x^2+y^2)(4^2+5^2)\geq(4x+5y)^2$

$$\Rightarrow(x^2+y^2)\times41\geq41^2$$

$$\Rightarrow(x^2+y^2)\geq41$$

且等號成立於$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}$，也就是(x^2+y^2)之最小值產生於$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}$時

設$x=4t$，$y=5t$，$t\in R$，將此代入$4x+5y=41$可得$16t+25t=41\Rightarrow t=1$

$\therefore x=4$，$y=5\Rightarrow$當$(x,y)=(4,5)$時 x^2+y^2會有最小值41

例題5：設$\vec{a}$，$\vec{b}$之間的夾角為θ，

$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影長=$\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|}{|\vec{b}|}=|\vec{a}||\cos\theta|$

$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正射影長=$\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|}{|\vec{a}|}=|\vec{b}||\cos\theta|$

依照題意敘述可得以下聯立條件:$\begin{cases}|\vec{a}||\cos\theta|=3|\vec{b}|\\ |\vec{b}||cos\theta|=\frac{1}{6}|\vec{a}|\end{cases}$

將上下兩式相乘得$|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|^2=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Rightarrow|\cos\theta|=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\theta=45^\circ$ or 135°

例題 6：將$\vec{a}$分解成與$\vec{b}$平行的分量$\vec{u}$及與$\vec{b}$垂直的分量$\vec{v}$，

其中與$\vec{b}$平行之分量$\vec{u}$即為$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影

$\vec{u}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\frac{4(-1)+(-3)2}{(-1)^2+2^2}(-1,2)=-2(-1,2)=(2,-4)$

由於$\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=\vec{a}-\vec{u}$

$\Rightarrow\vec{v}=(4,-3)-(2,-4)=(2,1)$