

數學 2 進階講義

數學歸納法

景美女中 · 李冠達老師



信望愛文教基金會

4-1-4 數學歸納法

定理敘述

數學歸納法

利用數學歸納法研究與處理數學問題，解題過程可分為兩步驟：

步驟 1：我們先觀察資料數值間的關係並找出其規律性，同時試著推測結論。

步驟 2：驗證推測的結論是否正確。

定理證明或說明

1. 數學歸納法

如果我們想驗證某一種關係或某一函數，特別是定義域與自然數 N 有關，只要能夠證明下述兩條件是否同時成立：

(1) 驗算 $n=1$ 時成立。『稱為起始步驟』

(2) 設 $n=k$ 時成立，進而推得 $n=k+1$ 時也成立。『稱為遞推步驟』

確認上述(1)(2)成立後，由數學歸納法可得該關係式對於所有正整數 n 都成立。

2. 數學歸納法的推廣（當 $n > 1$ 時）

對於某一關係式想驗證是否對於任意正整數 $n \geq m$ （ m 為大於或等於 2 的正整數）皆成立：

解題過程可分為兩步驟：

(1) 驗算 $n=m$ 時成立。『稱為起始步驟』

(2) 設 $n=k$ （ $k \geq m$ ）時成立，進而推得 $n=k+1$ 時也成立。『稱為遞推步驟』

確認上述(1)(2)成立後，由數學歸納法可得該關係式對於所有正整數 $n \geq m$ 都成立。

注意事項

1. 定義域與自然數 N 有關

2. 由數學歸納法及其推廣得知『起始步驟』和『遞推步驟』缺一不可。



關鍵字

正整數、自然數、數學歸納法

例題 1

對所有正整數 n ，證明： $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

Ans：

(1) 當 $n=1$ 時，左式 $= 1^2 = 1$ ，右式 $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ ，原式成立。

(2) 設當 $n=k$ 時，原式成立，即 $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} = \text{右式}
\end{aligned}$$

得當 $n=k+1$ 時，原式亦成立，由數學歸納法得證。

例題 2

對所有正整數 n ，證明： $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 。

Ans：

(1) 當 $n=1$ 時，左式 $= 1^3 = 1$ ，右式 $= \left[\frac{1 \cdot 2}{2}\right]^2 = 1$ ，原式成立。

(2) 設當 $n=k$ 時，原式成立，即 $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = [\frac{k(k+1)}{2}]^2$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}\text{左式} &= 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = [\frac{k(k+1)}{2}]^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ &= [\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}]^2 = \text{右式}\end{aligned}$$

得當 $n=k+1$ 時，原式亦成立，由數學歸納法得證。

例題 3

對所有正整數 n ，證明： $8^n + 6$ 恆為 7 的倍數。

Ans：

(1) 當 $n=1$ 時，得 $8^1 + 6 = 14$ 是 7 的倍數。

(2) 設當 $n=k$ 時成立，即 $8^k + 6 = 7t$ 是 7 的倍數。(其中 $t \geq 2$)

則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 8^{k+1} + 6 = 8 \cdot 8^k + 6 \\ &= 8(8^k + 6) - 42 \\ &= 8 \cdot 7t - 42 \\ &= 7(8t - 6) \text{ 為 7 的倍數。}\end{aligned}$$

得當 $n=k+1$ 時原式亦成立，由數學歸納法得證。

例題 4

試證：所有 $n \geq 3$ 的正整數，恆有 $n^2 > 2n$ 。

Ans：

(1) 當 $n=3$ 時，左式 $= 3^2 = 9$ ，右式 $= 2 \times 3 = 6$ ，原式成立。

(2) 設當 $n=k \geq 3$ 時成立，即 $k^2 > 2k$ 。

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\text{左式} = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 2k + 1 > 2(k+1) = \text{右式}$$

得當 $n = k + 1$ 時，原式亦成立，由數學歸納法得證。

例題 5

不論 n 為任意正整數， $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ 恆為質數 P 的倍數，

- (1) 試求此質數 P 。
- (2) 並以數學歸納法證明之。

Ans：

- (1) $n = 1$ 時，得 $2^3 + 3^3 = 35$ ，推得 $P = 5$ 或 $P = 7$ 。

$$n = 2 \text{ 時，得 } 2^4 + 3^5 = 259，\text{推得 } P = 7。$$

- (2) 證明：

①當 $n = 1$ 時，原式 $= 2^3 + 3^3 = 35$ ，原式成立。

②設當 $n = k$ 時成立， $2^{k+2} + 3^{2k+1} = 7t$ 是 7 的倍數。

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned}\text{左式} &= 2^{k+3} + 3^{2k+3} = 2 \cdot 2^{k+2} + 9 \cdot 3^{2k+1} = 2(2^{k+2} + 3^{2k+1}) + 7 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 2 \cdot 7t + 7 \cdot 3^{2k+1} = 7(2t + 3^{2k+1}) = \text{右式}\end{aligned}$$

得當 $n = k + 1$ 時原式成立，由數學歸納法得證。

例題 6

不論 n 是任意正整數，若 $n \geq m$ 時， $5^n > 3^n + 4^n$ 恆成立，

- (1) 推測正整數 m 的最小值。
- (2) 並以數學歸納法證明之。

Ans：

- (1) 當以 $n = 1, 2$ 得不合結果，但是以 $n = 3, 4, 5, \dots$ 符合，推論 $m = 3$ 。

- (2) 證明：

①當 $n = 3$ 時，左式 $= 5^3 = 125$ ，右式 $= 3^3 + 4^3 = 91$ ，原式成立。

②設當 $n = k \geq 3$ 時成立，即 $5^k > 3^k + 4^k$ ，

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\text{左式} = 5^{k+1} = 5 \cdot 5^k$$

$$> 5(3^k + 4^k) = 5 \cdot 3^k + 5 \cdot 4^k$$

$$> 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k = 3^{k+1} + 4^{k+1} = \text{右式}$$

得當 $n = k + 1$ 時原式成立，由數學歸納法得證。

例題 7

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{4 - a_n}{3 - a_n}$ ($n \geq 1$)

(1) 試求 a_2, a_3, a_4, a_5 ，並嘗試推測 a_n 之值。(請以 n 表示)

(2) 利用數學歸納法，證明(1)的推測是否正確。

Ans：

(1) 經代入計算後，可得

$$a_2 = \frac{3}{2} ; a_3 = \frac{5}{3} ; a_4 = \frac{7}{4} ; a_5 = \frac{9}{5}$$

觀察後推測 $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$)。

(2) ①當 $n = 1$ 時， $a_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$ ，原式成立。

②設當 $n = k$ 時，原式成立，即 $a_k = 2 - \frac{1}{k}$ ，

則當 $n = k + 1$ 時，

$$a_{k+1} = \frac{4 - a_k}{3 - a_k} = \frac{4 - (2 - \frac{1}{k})}{3 - (2 - \frac{1}{k})} = \frac{2k+1}{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1}$$

得當 $n = k + 1$ 時原式成立，由數學歸納法得證。

例題 8

設 $n \in \mathbf{N}$ ，試證： $2^{4n+1} - 6^n$ 的個位數字恆為 6。

Ans：

(1) 當 $n = 1$ 時， $2^5 - 6 = 32 - 6 = 26 = 20 + 6$ 成立，個位數字為 6

(2) 設當 $n = k$ 時成立, 即 $2^{4k+1} - 6^k = 10\ell + 6$ ($\ell \in N$)

則當 $n = k + 1$ 時

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2^{4(k+1)+1} - 6^{k+1} = 2^{4k+1} \cdot 2^4 - 6^k \cdot 6 \\ &= 16(2^{4k+1} - 6^k) + 10 \times 6^k \\ &= 16(10\ell + 6) + 10 \cdot 6^k \\ &= 160\ell + 96 + 10 \cdot 6^k \\ &= 10(16\ell + 9 + 6^k) + 6 \quad \text{個位數字為 } 6\end{aligned}$$

得當 $n = k + 1$ 時亦成立, 由數學歸納法得證。

【伯努力不等式 (Bernoulli Inq.)】

例題 9

設 $n \in N$, 若 $p \geq -1$, 則 $(1+p)^n \geq 1+np$, 請證明之。

Ans :

(1) 當 $n = 1$ 時, 左式 $= 1 + p \geq 1 + p =$ 右式, 原式成立。

(2) 設當 $n = k$ 時原式成立, 即 $(1+p)^k \geq 1+kp$

則當 $n = k + 1$ 時,

$$\begin{aligned}\text{左式} &= (1+p)^{k+1} = (1+p)^k (1+p) \\ &\geq (1+kp) \cdot (1+p) \quad (\text{其中 } 1+p \geq 0) \\ &= 1 + (k+1)p + kp^2 \\ &\geq 1 + (k+1)p = \text{右式} \quad (\text{其中 } kp^2 \geq 0)\end{aligned}$$

得當 $n = k + 1$ 時, 原式亦成立, 由數學歸納法得證。

例題 10

對所有 $n \geq 2$ 的正整數, 試證: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$ 。

Ans :

(1) $n = 2$ 時, 左式 $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\text{右式} = \frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

故 $\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ ，故 $n=2$ 時，原式成立。

(2) 設當 $n=k \geq 2$ 時，原式成立，即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\text{左式} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2k+1}{k+1},$$

$$\text{右式} = \frac{2(k+1)}{(k+1)+1} = \frac{2(k+1)}{k+2}$$

利用左式－右式得

$$\begin{aligned} \text{左式} - \text{右式} &= \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{(2k+1)(k+2) - (k+1) \cdot 2(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \quad (\text{左式} - \text{右式} > 0) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\text{即 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

得當 $n=k+1$ 時，原式亦成立，由數學歸納法得證。



溫故知新

習題 1

對所有正整數 n ，請檢驗下列各式是否成立？

(1) $n^2 + n + 1$ 恆為質數。

(2) $2^n + 1$ 恆為 3 的倍數。

習題 2

所有 $n > 3$ 的正整數，試證： $2^n \geq 3n$ 。

習題 3

設 n 為大於或等於某一個正整數 m 的任意正整數時， $2^n > n^2 + 11$ 恆成立。

- (1) 推測正整數 m 的最小值。
- (2) 並以數學歸納法證明之。

習題 4

設 $n \in \mathbf{N}$ ，試證： $10^{n+1} - 9n - 10$ 恆為 81 的倍數。

習題 5

數列 $\langle a_n \rangle$ 定義為 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1}$ ($n \geq 1$)

- (1) 試求 a_2, a_3, a_4 ，並嘗試推測 a_n 之值。(請以 n 表示)
- (2) 利用數學歸納法，證明(1)的推測是否正確。



習題 1：(1) 分別以 $n=1, 2, 3$ 代入得到質數 3, 7, 13，

但 $n=4$ 時， $21=3 \times 7$ 是合成數，並非質數，

因此對所有正整數 n ， $n^2 + n + 1$ 並非恆為質數。

(2) $n=1$ 時得 3，為 3 的倍數，但 $n=2$ 時得 5，不是 3 的倍數，

因此對所有正整數 n ， $2^n + 1$ 並非恆為 3 的倍數。

習題 2：(1) 當 $n=4$ 時，左式 $= 2^4 = 16$ ，右式 $= 3 \cdot 4 = 12$ ，原式成立。

(2) 設當 $n=k \geq 4$ 時成立，即 $2^k \geq 3k$ 。

則當 $n=k+1$ 時，

左式 $= 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot 3k = 3k + 3k \geq 3k + 12 \geq 3(k+1) =$ 右式

得當 $n=k+1$ 時，原式亦成立，由數學歸納法得證。

習題 3：(1) $n=1, 2, 3, 4, 5$ 不合， $n=6, 7, 8, 9, 10, \dots$ 均合，推測 $m=6$ 。

(2) 證明：

①當 $n=6$ 時，左式 $=64$ ，右式 $=47$ ，原式成立。

②設當 $n=k \geq 6$ 時成立，即 $2^k > k^2 + 11$ ，

則當 $n=k+1$ 時，

$$\text{左式} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k$$

$$> (k^2 + 11) + (k^2 + 11)$$

$$> k^2 + 11 + 2k + 1 = (k+1)^2 + 11 = \text{右式}$$

得當 $n=k+1$ 時原式成立，由數學歸納法得證。

習題 4： (1) 當 $n=1$ 時， $10^2 - 9 - 10 = 81$ 可以被 81 整除。

(2) 設當 $n=k$ 時原式成立，

$$\text{即 } 10^{k+1} - 9k - 10 = 81p, \text{ 其中 } p \in N$$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\text{原式} = 10^{k+2} - 9(k+1) - 10$$

$$= 10 \cdot (10^{k+1} - 9k - 10) + 81k + 81$$

$$= 10 \cdot 81p + 81k + 81$$

$$= 81(10p + k + 1) \text{ 可被 81 整除}$$

得當 $n=k+1$ 時亦成立，由數學歸納法得證。

習題 5： (1) $a_2 = \frac{2}{3}$ ； $a_3 = \frac{3}{5}$ ； $a_4 = \frac{4}{7}$ ； $a_n = \frac{n}{2n-1}$

(2) 請自行嘗試證明。