

數學 2

進階
講義

三事件的獨立事件

景美女中 · 莊嘉銘 老師



信望愛文教基金會

6-4-2 三事件的獨立事件

定理證明或說明

1. 定義

若 A, B, C 為獨立事件，則

$$(1) P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$(2) P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$(3) P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$(4) P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

2. 特性

若 A, B, C 為獨立事件，則 A, B, C, A', B', C' 任三個亦為獨立事件

3. 互斥事件

若 A, B 為互斥事件，則 $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

關鍵字

獨立事件、互不影響

例題 1

袋中有編號1到9的球各一個，自袋中任取一球，設 A 為取到球號為1, 3, 5的事件， B 為取到球號為2, 5, 8的事件， C 為取到球號為4, 5, 6的事件。試問 A, B, C 三事件是否獨立？

Ans :

要檢查三事件是否獨立，則需滿足

$$(1) P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$(2) P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$(3) P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$(4) \quad P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$\text{可知 } P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$\text{且 } P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{9}$$

$$\text{故前三項均滿足，但 } P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{9}, \text{ 而 } P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{27}$$

所以第四項不滿足，故 A, B, C 三事件不是獨立事件

例題 2

設甲、乙、丙三人打靶，甲命中率為 $\frac{1}{2}$ ，乙命中率為 $\frac{2}{3}$ ，丙命中率 $\frac{3}{4}$ ，今三人同時射擊一靶各打一發，靶中一發的機率為何？(命中互不影響)

Ans：

因為三人打靶互不影響，故為獨立事件，

所以

$$P(\text{靶中一發}) = P(\text{甲中且乙丙沒中}) + P(\text{乙中且甲丙沒中}) + P(\text{丙中且甲乙沒中})$$

$$\text{即所求為 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

例題 3

設 A, B, C 為三獨立事件且 $P(A) = \frac{2}{3}$ 、 $P(A \cap B' \cap C) = \frac{1}{4}$ 、

$$P(A \cap B' \cap C') = \frac{1}{12}, \text{ 求：(1) } P(B) \text{ (2) } P(C) \text{ (3) } P(A|B \cap C')$$

Ans：

(1)(2) A, B, C 獨立 $\Rightarrow A, B', C$ 獨立， A, B', C' 也獨立，設 $P(B) = b$ 、 $P(C) = c$

依題意可知

$$\begin{cases} P(A \cap B' \cap C) = P(A)P(B')P(C) = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B' \cap C') = P(A)P(B')P(C') = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(1-b)c = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}(1-b)(1-c) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

兩式相除得 $\frac{c}{1-c} = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$ ，代入 $\frac{2}{3}(1-b)c = \frac{1}{4}$ ，得 $b = \frac{1}{2}$ ，故 $P(B) = \frac{1}{2}$ 且 $P(C) = \frac{3}{4}$

$$(3) P(A|B \cap C') = \frac{P(A \cap B \cap C')}{P(B \cap C')} = \frac{P(A)P(B)P(C')}{P(B)P(C')} = P(A) = \frac{2}{3}$$

例題 3

某颱風天，小喬想去看「海角七號」這部電影，先前往 A 電影院，但 A 電影院爆滿（買不到票）的機率為 $\frac{1}{2}$ ，若 A 電影院爆滿就前往 B 電影院，但 B 電影院爆滿（買不到票）的機率為 $\frac{1}{3}$ ，若 B 電影院爆滿就再前往 C 電影院，但 C 電影院爆滿（買不到票）的機率為 $\frac{1}{4}$ ，若 C 電影院爆滿（買不到票）就直接回家；今假設 A, B, C 三電影院爆滿與否為獨立事件，問小喬在當天看到「海角七號」的機率為何？

Ans：

小喬在當天看到電影的機率即為 $P(A \cup B \cup C)$

若反向思考，則小喬看不到電影的機率為：

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$$

$$\text{故 } P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$$



習題 1

已知三事件 A, B, C 為獨立事件，其發生的機率分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，請選出正確的

選項：(1) 三事件均發生的機率為 $\frac{1}{4}$ (2) 三事件均不發生的機率為 $\frac{1}{4}$

(3) 恰有一事件發生的機率為 $\frac{1}{4}$ (4) 恰有二事件發生的機率為 $\frac{1}{4}$

習題 2

甲、乙、丙三射手同射一靶，每人一發，設甲、乙、丙的射擊命中率各為 0.5、0.6、0.8，並設各人命中靶面的事件為獨立事件，求靶面恰中一發的機率為何？

習題 3

甲、乙、丙三人參加某校入學考試，依平日成績推估：甲、乙、丙錄取的機率依次分別為 0.5、0.6、0.8 且三人錄取與否為獨立事件，則試求：

(1) 三人中至少有一人錄取的機率 (2) 三人中恰有兩人錄取的機率

習題 4

下列敘述何者正確？

- (1) 若 A, B 為獨立事件，則 A', B 也是獨立事件
- (2) 若 A, B 為互斥事件，且 $P(A)P(B) \neq 0$ ，則 A, B 必為相關事件
- (3) 若 A, B 為獨立事件， B, C 為獨立事件，則 A, C 也是獨立事件
- (4) 若 A, B, C 兩兩為獨立事件，則 A, B, C 三事件獨立
- (5) 若 A, B, C 為獨立事件，則 $P(A|B \cap C) = P(A|B)$



習題 1 : (1)(3)

【詳解】(1) 因為三事件 A, B, C 為獨立事件，所以三事件均發生的機率為

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(2) A', B', C' 亦為獨立事件，故 A, B, C 事件均不發生的機率為

$$P(A' \cap B' \cap C') = P(A') \cdot P(B') \cdot P(C') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

(3) 恰有一事件發生的情形為「 A 發生， B, C 不發生」，

「 B 發生， A, C 不發生」或「 C 發生， A, B 不發生」

且三情形彼此為互斥事件

所以恰有一事件發生的機率為

$$\begin{aligned} & P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(4) 同(3) 的討論，故恰有二事件發生的機率為

$$\begin{aligned} & P(A \cap B \cap C') + P(A \cap B' \cap C) + P(A' \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2+6+3}{24} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

故答案為(1)(3)。

習題 2 : 0.26

【詳解】 $P(\text{靶面恰中一發}) = P(\text{只有甲中}) + P(\text{只有乙中}) + P(\text{只有丙中})$
 $= 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8$
 $= 0.26$

習題 3 : (1) 0.96 (2) 0.46

【詳解】(1) $P(\text{三人至少一人錄取}) = 1 - P(\text{三人均失敗}) = 1 - 0.5 \times 0.4 \times 0.2 = 0.96$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(\text{恰有兩人錄取}) &= P(\text{只有甲沒上}) + P(\text{只有乙沒上}) + P(\text{只有丙沒上}) \\ &= 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

習題 4 : (1)(2)(5)

【詳解】(3)(4) 不一定

$$(5) \quad P(A|B \cap C) = P(A) = P(A|B)$$

故選(1)(2)(5)