



B5 3-1 推理證明



概念 ① 認識證明 1



☆已知： $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 相交於 O 點，

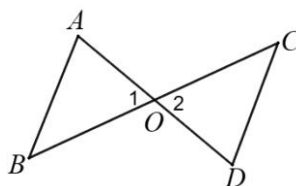
形成兩個 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$

若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，請問：

(1) $\angle 2 =$ _____ 度。

(2) $\angle A + \angle B =$ _____ 度。

(3) $\angle C + \angle D =$ _____ 度。



☆不管 $\angle 1$ 是幾度， $\angle A + \angle B$ 都會等於 $\angle C + \angle D$ 嗎？為什麼？

已知：_____

求證：_____

證明：

☆筆記

根據下面的敘述，寫出

已知和求證

等腰 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

則 $\angle B = \angle C$

已知：

求證：



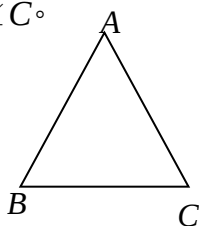
牛刀小試 1

請根據下列敘述，練習找出已知條件和求證。

1. 若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 $\angle B = \angle C$ 。

已知：

求證：

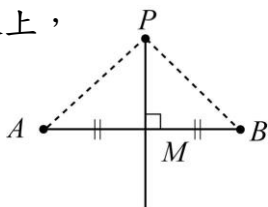


2. 若 P 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，

則 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

已知：

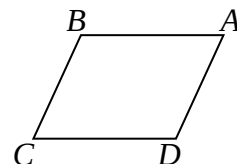
求證：



3. 若 $ABCD$ 為平行四邊形，則對角相等。

已知：

求證：



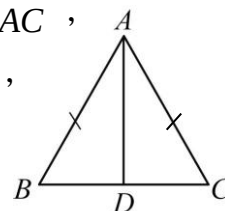
4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

$\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線，

則 $\overline{BD} = \overline{CD}$ 。

已知：

求證：

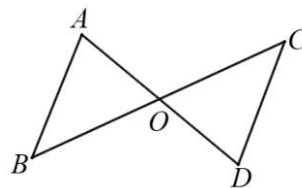




已知： $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 相交於 O 點，形成兩個 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$

求證： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

證明：



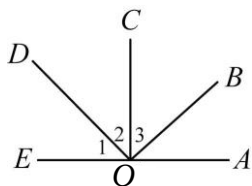
☆筆記

證明就是_____



牛刀小試 2

1. 已知： $\overline{OC} \perp \overline{EA}$ ， $\overline{OB} \perp \overline{OD}$



求證： $\angle 1 = \angle 3$

證明： $\because \overline{OC} \perp$ _____

$\therefore \angle 1 + \angle 2 =$ _____ 度

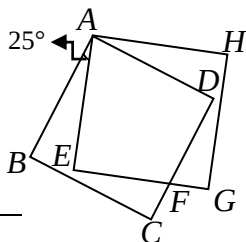
$\because \overline{OB} \perp$ _____

$\therefore \angle 2 + \angle 3 =$ _____ 度

推得 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____

故 $\angle 1 = \angle$ _____

2. 如圖，正方形 $ABCD$ 、 $AEGH$ 交於 A 點，
若 $\angle BAE = 25^\circ$ ，則



(1) $\angle DAE =$ _____

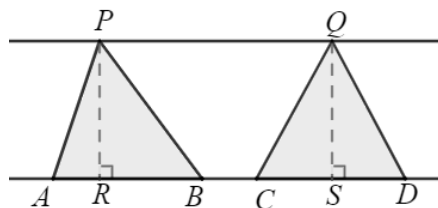
(2) $\angle DAH =$ _____

(3) $\angle EFD =$ _____

3. 已知： $L \parallel M$ 且 $\overline{PR} \perp M$ ， $\overline{QS} \perp M$

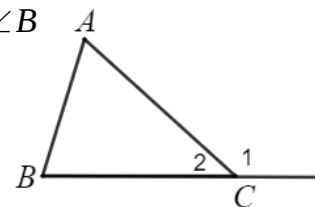
且 $\overline{AB} = \overline{CD}$

求證： $\triangle PAB$ 面積 $= \triangle QCD$ 面積



4. 已知： $\angle 1$ 為 $\triangle ABC$ 的外角，

求證： $\angle 1 = \angle A + \angle B$





如圖： $\triangle ABC$ 為等腰 $\triangle$ ， D 是 $\overline{BC}$ 的中點

證明： $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線

思考過程

1. 證明： $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線

$\Rightarrow$ _____

2. 已知：

① $\triangle ABC$ 為等腰 $\triangle$

$\Rightarrow$ _____

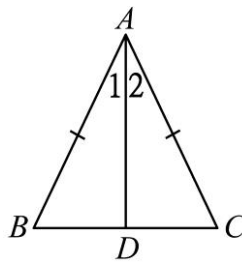
② D 是 $\overline{BC}$ 的中點

$\Rightarrow$ _____

③ 隱藏條件

$\Rightarrow$ _____

3. 利用 _____ 來證明



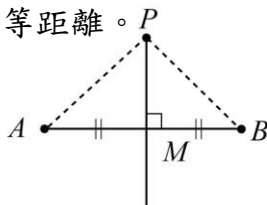
☆筆記
證明要寫什麼？



牛刀小試 3

1. 已知 $\overleftrightarrow{PM}$ 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。

求證： P 點到 $\overline{AB}$ 兩端點等距離。



思考過程

(1) 證明： P 點到 $\overline{AB}$ 兩端點等距離。

$\Rightarrow$ _____

(2) 已知：

① $\overleftrightarrow{PM}$ 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。

$\Rightarrow$ _____

② 隱藏條件：

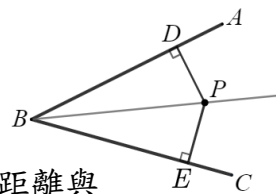
$\Rightarrow$ _____

(3) 利用 _____ 來證明。

證明過程

2. 已知 P 點是 $\angle ABC$ 的角平分線上任一點。

證明： P 點到 $\overline{AB}$ 的距離與 P 點到 $\overline{BC}$ 的距離相等。



思考過程

(1) 證明： P 點到 $\overline{AB}$ 的距離與
 P 點到 $\overline{BC}$ 的距離相等。

$\Rightarrow$ _____

(2) ① 已知 P 是 $\angle ABC$ 的角平分線

$\Rightarrow$ _____

② 隱藏條件 $\Rightarrow$ _____

(3) 利用 _____ 來證明。

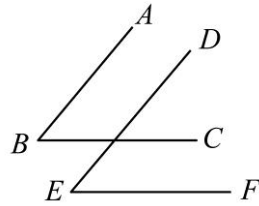
證明過程



例題 ① 利用平行線性質證明 1——同位角



已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ 求證： $\angle B = \angle E$



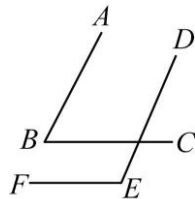
☆筆記

☆

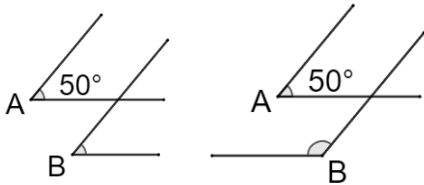


牛刀小試 4

1. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，
求證 $\angle B + \angle E = 180^\circ$ 。



2. 已知 $\angle A$ 和 $\angle B$ 兩邊分別平行，
若 $\angle A = 50^\circ$ ，則 $\angle B =$ _____ 度。



3. 已知 $\angle A$ 和 $\angle B$ 兩邊分別平行，
若 $\angle A = 80^\circ$ ，則 $\angle B =$ _____ 度。
(畫畫看)

4. 已知： $L \parallel M$ ，
求證 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$

證明：

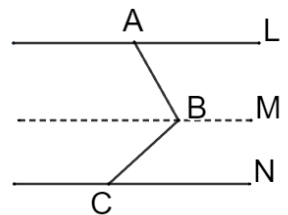
過 B 點作一直線 $N \parallel L$ ，則 $N \parallel L \parallel M$

$\therefore \angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角)

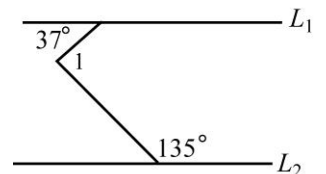
$\angle 4 = \angle$ _____ (_____ 角)

因此 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 =$ _____

故 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$



5. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 =$ _____ 度。





例題 ② 利用平行線性質證明 2——平行四邊形

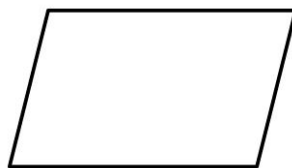


請證明平行四邊形對角相等

已知：_____

求證：_____

證明：



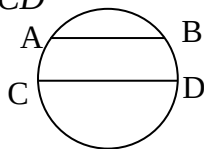
☆筆記



牛刀小試 5

1. 已知：圓內有兩條弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$

且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，



求證： $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

證明：

① 連 $\overline{AD}$

② $\because \overline{AB} \parallel$ _____

$\therefore \angle ADC = \angle$ _____ (_____ 角相等)

③ $\widehat{AC} = 2\angle ADC = 2\angle$ _____
= _____。

2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\overline{CD}$ 為 $\angle C$ 的角平分線，則下列哪一個選項不一定正確？

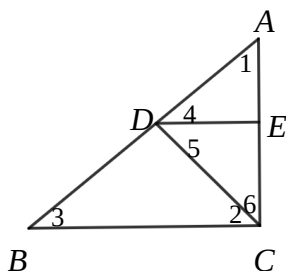
(A) $\angle 2 = \angle 6$

(B) $\angle 2 = \angle 5$

(C) $\angle 5 = \angle 6$

(D) $\angle 3 = \angle 4$

(E) $\angle 4 = \angle 5$



3. 已知：梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

且 $\overline{AC}$ 為 $\angle C$ 的角平分線，

試證： $\overline{AB} = \overline{BC}$

證明：

① $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\therefore \angle 1 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

② $\because \overline{AC}$ 為 $\angle C$ 角平分線

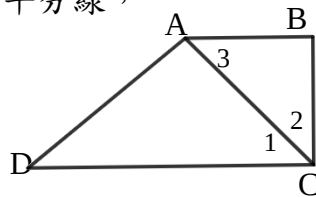
$\therefore \angle 1 = \angle$ _____，

由①和②推得 $\angle 2 = \angle$ _____

③ $\triangle ABC$ 中

$\therefore \angle 2 = \angle$ _____

故 $\overline{AB} =$ _____。



★4. 如圖， $\overline{BI}$ 、 $\overline{CI}$ 分別為 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的角平分線，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 6$ ，

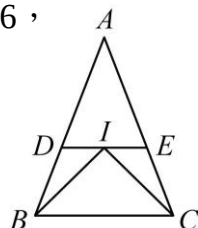
$\overline{BD} = 2$ ， $\overline{AE} = 7$ ， $\overline{EC} = 3$ ，

則 $\triangle ADE$ 周長 = ？

① $\overline{DI} =$ _____。

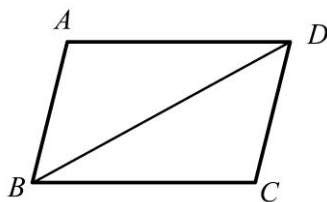
② $\overline{EI} =$ _____。

③ $\angle AEB = \angle$ _____ $= 90^\circ$



**例題****③****利用三角形的全等性質證明 1——平行四邊形**已知：四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形求證： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

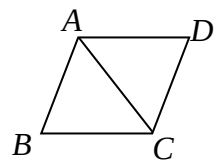
證明：



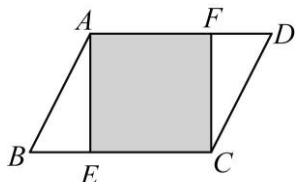
☆筆記

**牛刀小試 6**

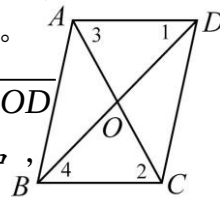
1. 如右圖，已知
- $\triangle ADB$
- 和
- $\triangle CDB$
- 中，

 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\angle BAC = \angle ACD$ 。試證 $\angle B = \angle D$ 。證明： $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中 $\therefore$ ① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)② $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)③ $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (公用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (_____全等性質)故 $\angle B = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ (對應角相等)。

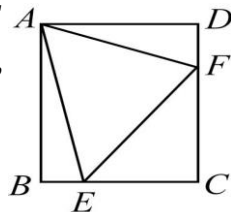
2. 如右圖，在四邊形
- $ABCD$
- 中，

有一正方形 $AECF$ 。且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，試證 $\angle B = \angle D$ 。證明： $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中 $\therefore$ ① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ② $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($ABCD$ 是正方形)③ $\angle AEB = \angle \underline{\hspace{2cm}} = 90^\circ$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (_____全等)故 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 

3. 證明平行四邊形兩對角線互相平分。

已知： $ABCD$ 為平行四邊形。求證： $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ 證明：在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OCB$ 中， $\therefore ABCD$ 為平行四邊形① $\angle 1 = \angle 4$ (_____角相等)② $\angle 3 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ (_____角相等)③ $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對邊相等) $\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCB$ (_____全等性質)故 $\overline{OA} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\overline{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)

4. 如右圖，已知正方形
- $ABCD$
- ，
- $\triangle AEF$
- 為正三角形。證明
- $\angle BAE = \angle DAF$

證明：在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADF$ 中， $\therefore$ ① $\underline{\hspace{2cm}} = \overline{AD}$ (正方形)② $\underline{\hspace{2cm}} = \angle D = 90^\circ$ ③ $\underline{\hspace{2cm}} = \overline{AF}$ ($\triangle AEF$ 為正三角形) $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (_____全等性質)故 $\underline{\hspace{2cm}} = \angle DAF$ (對應角相等)

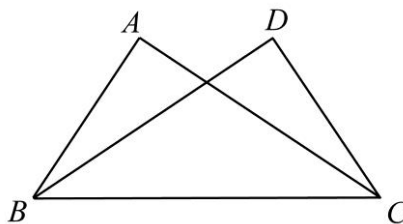


例題 4 利用三角形的全等性質證明 2——重疊圖形



如圖，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中
已知： $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$
求證： $\angle A = \angle D$

證明：

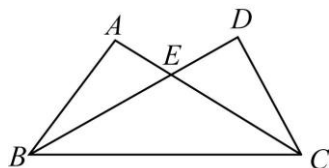


☆筆記



牛刀小試 7

1. $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，
求證： $\angle ACB = \angle DBC$



2. 已知： $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，
求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$

證明：在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

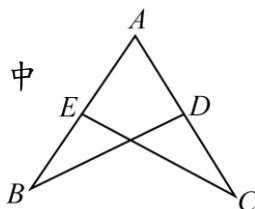
① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

② $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$ (____全等)

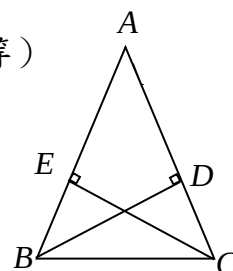
故 $\overline{BD} = \overline{CE}$



3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{CE} \perp \overline{AB}$

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$

(等腰 $\triangle$ 中，腰上的高相等)



4. (1) 已知： $\triangle ABC$ 與 $\triangle BPQ$ 均為正 $\triangle$
求證： $\angle AQB = \angle BPC$

證明：在 $\triangle AQB$ 與 $\triangle CBP$ 中

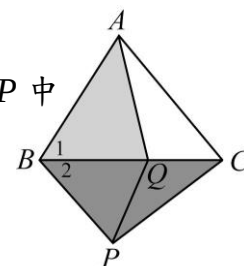
① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

($\because \triangle ABC$ 是正 $\triangle$)

② $\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}} = 60^\circ$

③ $\overline{BQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\because \triangle BPQ$ 是正 $\triangle$)

$\triangle AQB \cong \triangle CBP$ (____全等)



- (2) 若 $\angle AQB = 100^\circ$ ，
則 $\angle BPC = \underline{\hspace{2cm}}$ 度， $\angle QPC = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。



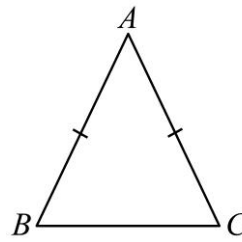
例題 5 利用三角形的全等性質證明 3——輔助線



已知： $\triangle ABC$ 為等腰 $\triangle$

求證： $\angle B = \angle C$

證明：



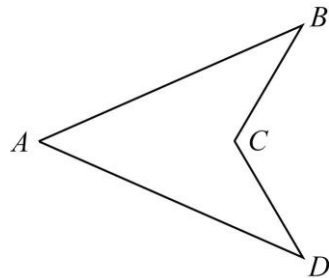
☆筆記



牛刀小試 8

1. $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$

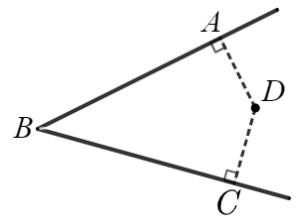
(1) 求證 $\angle ABC = \angle ADC$



(2) 由上題中，若 $\angle BAC = 25^\circ$
 $\angle CDA = 38^\circ$ ，則 $\angle BCD = ?$

2. 四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ，
 $\overline{CD} \perp \overline{BC}$

(1) 證明 $\overline{AD} = \overline{CD}$



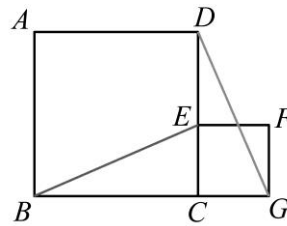
(2) 承上題，已知 $\overline{AD} = \overline{CD} = 8$ ，
 $\overline{BC} = 15$ ， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，
 求四邊形 $ABCD$ 面積。

**例題****6****利用三角形的全等性質證明 4——正方形**

已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $CEFG$ 都是正方形，
而且 E 在 $\overline{CD}$ 上

求證： $\overline{BE} = \overline{DG}$

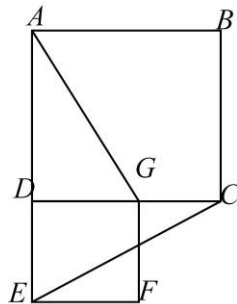
證明：



☆筆記

**牛刀小試 9**

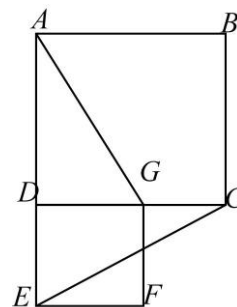
1. 已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $DEFG$ 都是正方形。求證 $\overline{AG} = \overline{CE}$ 。



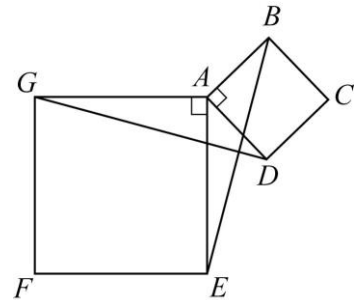
2. 已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $DEFG$ 都是正方形。若 $\overline{DG} = 5$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

(1) $\overline{AG} =$ _____

(2) $\overline{CE} =$ _____



- ★3. 已知：正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ ，
求證 $\overline{BE} = \overline{GD}$ 。



- ★4. 已知：正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ ，
 $\angle ACB = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AB} = 5$ ，求

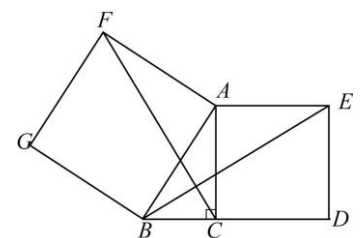
(1) $\overline{AC} =$ _____

(2) $\overline{DE} =$ _____

(3) $\overline{BD} =$ _____

(4) $\overline{BE} =$ _____

(5) $\overline{CF} =$ _____

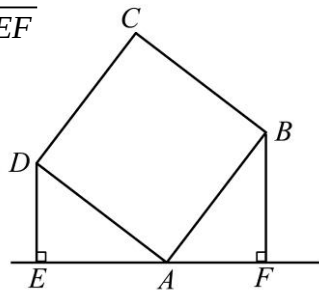


**例題****7****利用三角形的全等性質證明 5——直角三角形**

已知： $ABCD$ 是正方形，而且 $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{EF}$

求證： $\overline{DE} = \overline{AF}$

證明：



☆筆記

**牛刀小試 10**

1. 四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

$\overline{BF} \perp \overline{CF}$

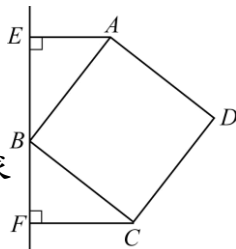
(1) 試證： $\overline{AE} = \overline{BF}$

(2) $\overline{AE} = 3$ ， $\overline{CF} = 4$ ，求

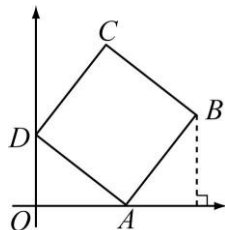
① $\overline{BF} =$ _____，

② $\overline{BC} =$ _____，

③ $\overline{AB} =$ _____。

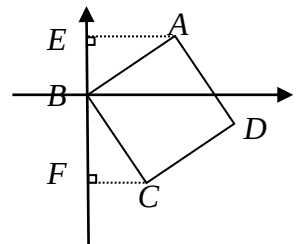


2. 四邊形 $ABCD$ 為正方形，若 A 點坐標 $(12, 0)$ ， D 點坐標 $(0, 5)$ ，求 B 點坐標。



3. 四邊形 $ABCD$ 為正方形，若 $\overline{CB} = 13$ ，

$\overline{AE} = 12$ ，求 C 坐標。



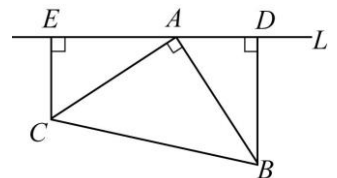
★4. 如右圖， $\overline{BD} \perp L$ ， $\overline{EC} \perp L$ ， $\angle BAC =$

90° ， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，若 $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AE} = 4$ ，

則 $\overline{BD} =$ _____，

$\overline{AC} =$ _____，

$\overline{BC} =$ _____。



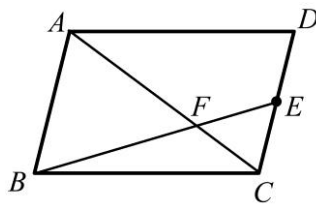


例題 8 利用相似性質來證明



已知：如圖，在 $\square ABCD$ 中， E 為 $\overline{CD}$ 中點， $\overline{BE}$ 和 $\overline{AC}$ 交於 F

求證： $\overline{AF} = 2 \overline{CF}$



☆筆記

☆

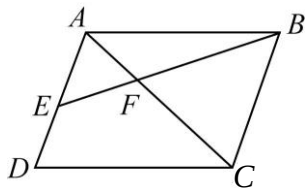


牛刀小試 11

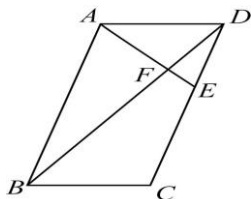
1. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 E 為 $\overline{AD}$ 的中點， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 F 點，求證：

(1) $\triangle AEF \sim \triangle CBF$ 。

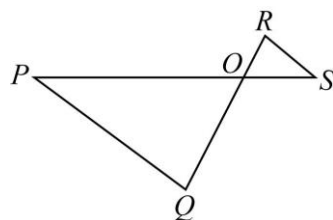
(2) $\overline{CF} = 2 \overline{AF}$ 。



2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，
 $\overline{DE} : \overline{EC} = 1 : 2$ ，且 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 F ，
 若 $\overline{AF} = 6$ ，則 $\overline{EF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



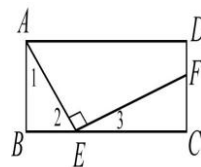
3. 如圖， $\overline{PS}$ 與 $\overline{QR}$ 交於 O 點， $\overline{OP} = 3 \overline{OS}$ ，
 $\overline{OQ} = 3 \overline{OR}$ ，求證： $\overline{PQ} = 3 \overline{RS}$ 。



- ★4. 已知長方形 $ABCD$ 中， $\angle AEF = 90^\circ$ ，
 試證 $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ 。

證明

- (1) 在 $\triangle ABE$ 中
 $\angle 1 + \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 又 $\angle AEF = 90^\circ$
 $\therefore \angle 3 + \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 推得 $\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}$



- (2) $\triangle ABE$ 和 $\triangle ECF$ 中
 ① $\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
 ② $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 相似)



舉例：

1. 偶數：_____

☆換個寫法：_____

問題：有沒有辦法可以寫出世界上所有的偶數？

2. 奇數：_____

☆換個寫法：_____

問題：有沒有辦法可以寫出世界上所有的奇數？

☆筆記

① 0 是奇數還是偶數？

② 3 的倍數如何表示？



牛刀小試 12

1. (1)如何表示 0、2、4、6、……所有的數？

(2)如何表示 1、3、5、7、9…所有的數？

3. 如何表示下列所有的數

(1) 4、7、10、13……

(2) 6、11、16、21、26、31……

2. (1)如何表示 3、6、9、12…所有的數？

(2)如何表示 5、10、15、20…所有的數？

4. (1)被 4 整除的數，如何表示？

(2)被 4 除餘 1 的數，如何表示？

(3)被 4 除餘 2 的數，如何表示？

(4)被 4 除餘 3 的數，如何表示？



例題 9 代數證明 1——奇數和偶數



已知： a 是一個奇數

求證： a^2 也是奇數

證明：

☆筆記



牛刀小試 13

1. 已知： a 是偶數。
求證： a^2 也是偶數。

2. 若 a 為奇數。
試證： $a+1$ 為偶數。

3. 若 a 是整數，則(請填奇數或偶數)

- (1) $2a$ 為_____
- (2) $2a+1$ 為_____
- (3) $2a+2$ 為_____
- (4) $2(a+3)$ 為_____

4. 若 b 是奇數，則(請填奇數或偶數)

- (1) $b+1$ 為_____
- (2) $b+2$ 為_____
- (3) $2b$ 為_____
- (4) $2b+3$ 為_____

5. 若 c 是偶數，則 (請填奇數或偶數)

- (1) $c+1$ 為_____
- (2) $c+2$ 為_____
- (3) $3c$ 為_____
- (4) $3c+3$ 為_____

**例題****10 代數證明 2——比大小**

已知： a 、 b 是正數，而且 $a > b$

求證： $a^2 > b^2$

證明：

☆筆記

若 a 、 b 是正數， $a^2 > b^2$

則 $a \square b$

**牛刀小試 14**

1. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $7 \square 3 \Rightarrow 7^2 \square 3^2$

(2) $2 \square 5 \Rightarrow 2^2 \square 5^2$

2. (1) $(-7) \square (-3) \Rightarrow (-7)^2 \square (-3)^2$

(2) $(-2) \square (-5) \Rightarrow (-2)^2 \square (-5)^2$

3. 已知： a 、 b 為負數，且 $a < b$ 。

求證： $a^2 > b^2$

證明：

$$\because a < b < 0 \quad \therefore a - b \square 0,$$

$$\because a、b \text{ 為負數} \quad \therefore a + b \square 0$$

$$a^2 - b^2 = (\square)(\square) \square 0$$

$$\text{故 } a^2 > b^2$$

4. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $5^2 \square 4^2$ ，但 $5 \square 4$

(2) $3^2 \square 7^2$ ，但 $3 \square 7$

5. (1) $(-5)^2 \square (-2)^2$ ，但 $(-5) \square (-2)$

(2) $(-3)^2 \square (-7)^2$ ，但 $(-3) \square (-7)$

6. 已知： a 、 b 為負數，且 $a^2 < b^2$ 。

試證： $a > b$

證明：

$$a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 \square 0,$$

$$\Rightarrow (a + b)(a - b) \square 0$$

$\because a、b$ 為負數

$$\therefore a + b \square 0$$

$$\text{推得 } a - b \square 0$$

$$\text{故 } a \square b$$



例題 11 代數證明 3——畢氏定理



已知： a 、 b 、 c 分別為直角 $\triangle$ 的三邊長，而且 c 是斜邊
(其中 a 、 b 、 c 是正整數)

求證： a^2 是 $(b+c)$ 的倍數

證明：

☆筆記
因數和倍數



牛刀小試 15

1. 已知： a 和 b 是正整數，且 $a^2 = b^2 - 3^2$
求證： a^2 是 $(b+3)$ 的倍式。

2. 已知： a 和 b 是正整數，且 $a^2 + 5^2 = b^2$ ，
求證： a^2 是 $(b+5)$ 的倍式。

3. 在直角 $\triangle$ 中， a 為斜邊長， b 、 3 為兩股長。
其中 a 、 b 為正整數，請問 $a+b$ 是下列哪一個數的因數？

(A) 7 (B) 8 (C) 9

4. 已知直角 $\triangle$ 中， b 為斜邊長， a 、 7 為兩股長，其中 a 、 b 為正整數，則 $a+b$ 為下列哪一個因數？

(A) 25 (B) 36 (C) 49



解 答 篇

牛刀小試 1

- 已知: $\overline{AB} = \overline{AC}$
求證: $\angle B = \angle C$
- 已知: P 在 $\overline{AB}$ 的中垂線上
($\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$)
求證: $\overline{PA} = \overline{PB}$
- 已知: $ABCD$ 為平行四邊形
求證: 對角相等
($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$)
- 已知: $\overline{AB} = \overline{AC}$
 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線
($\angle BAD = \angle CAD$)
求證: $\overline{BD} = \overline{CD}$

牛刀小試 2

- $\because \overline{OC} \perp \overline{AE}$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$
 $\because \overline{OB} \perp \overline{OC}$
 $\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$
故 $\angle 1 = \angle 3$
- (1) 65° (2) 25° (3) 115°
- (1) $\because L \parallel M$, $\overline{PR} \perp M$, $\overline{QS} \perp M$
 $\therefore \overline{PR} = \overline{QS}$
(2) $\triangle PAB$ 面積 = $\frac{\overline{AB} \times \overline{PR}}{2}$
 $\triangle QCD$ 面積 = $\frac{\overline{AC} \times \overline{QS}}{2}$
(3) $\because \overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{PR} = \overline{QS}$
 $\therefore \triangle PAB$ 面積 = $\triangle QCD$ 面積
- $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
 $\angle A + \angle B + \angle 2 = 180^\circ$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B + \angle 2$
故 $\angle 1 = \angle A + \angle B$

牛刀小試 3

- (1) $\overline{PA} = \overline{PB}$
(2) ① $\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $\overline{AM} = \overline{BM}$
② $\overline{PM} = \overline{PM}$
(3) SAS 全等性質
證明過程
 $\triangle PAM$ 和 $\triangle PBM$ 中
 $\because \overline{PM}$ 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線
 $\therefore$ ① $\overline{AM} = \overline{BM}$,
② $\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ$
③ $\overline{PM} = \overline{PM}$ (共用邊)

$PAM \cong \triangle PBM$ (SAS 全等)
故 $\overline{PA} = \overline{PB}$

- (1) $\overline{PD} = \overline{PE}$
(2) ① $\angle DBP = \angle EBP$
② $\overline{PD} \perp \overline{AB}$, $\overline{PE} \perp \overline{BC}$
 $\overline{BP} = \overline{BP}$ (共用邊)
(3) AAS 全等性質
證明過程
 $\triangle DBP$ 和 $\triangle EBP$ 中
(1) $\because P$ 是 $\angle ABC$ 的角平分線
 $\therefore \angle DBP = \angle EBP$
(2) $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$
(3) $\overline{BP} = \overline{BP}$ (共用邊)
 $\triangle DBP \cong \triangle EBP$ (AAS 全等)
故 $\overline{PD} = \overline{PE}$

牛刀小試 4

- $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$
 $\therefore \angle ABC + \angle 1 = 180^\circ$ (同側內角)
 $\therefore \overline{BC} \parallel \overline{EF}$
 $\therefore \angle 1 = \angle E$ (同位角)
故 $\angle B + \angle E = 180^\circ$
- 50° 或 130°
- 80° 或 100°
- $\therefore \angle 3 = \angle 1$ (內錯角相等)
 $\angle 4 = \angle 2$ (內錯角相等)
因此 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
故 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$

5

牛刀小試 5

- ② $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 $\therefore \angle ADC = \angle BAD$ (內錯角相等)
③ $\widehat{AC} = 2\angle ADC = 2\angle BAD = \widehat{BD}$
- E
- ① $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$ (內錯角相等)
② $\because \overline{AC}$ 為 $\angle C$ 角平分線
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,
推得 $\angle 2 = \angle 3$
③ $\triangle ABC$ 中
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$
故 $\overline{AB} = \overline{BC}$

4.2, 3, 18

牛刀小試 6

- $\overline{DC}$, $\angle DCA$, $\overline{AC}$ SAS, $\angle D$

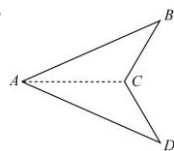
- $\overline{CD}$, $\overline{CF}$, $\angle CFD$, RHS, $\angle D$
- 內錯角, $\angle 2$, 內錯角, $\overline{BC}$,
ASA, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$
- $\overline{AB}$, $\angle B$, $\overline{AE}$, RHS, $\angle BAE$

牛刀小試 7

- $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中
① $\overline{AB} = \overline{DC}$
② $\overline{AC} = \overline{BD}$
③ $\overline{BC} = \overline{BC}$
 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SSS 全等)
故 $\angle ACB = \angle DBC$
- $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 中
① $\overline{AB} = \overline{AC}$
② $\overline{AD} = \overline{AE}$
③ $\angle A = \angle A$ (共用角)
 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS 全等)
故 $\overline{BD} = \overline{CE}$
- 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ 中
 $\therefore$ ① $\overline{AB} = \overline{BC}$
② $\angle ADE = \angle AEC = 90^\circ$
($\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$)
③ $\angle A = \angle A$ (共用角)
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (AAS 全等)
- (1) 在 $\triangle AQB$ 與 $\triangle CPB$ 中
 $\therefore$ ① $\overline{AB} = \overline{AC}$ ($\triangle ABC$ 是正 $\triangle$)
② $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$
③ $\overline{BQ} = \overline{BP}$ ($\triangle BPQ$ 是正 $\triangle$)
 $\therefore \triangle AQB \cong \triangle CPB$ (SAS 全等)
(2) 100, 40

牛刀小試 8

- (1) 連 $\overline{AC}$
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$
 $\therefore$ ① $\overline{AB} = \overline{AD}$
② $\overline{BC} = \overline{DC}$
③ $\overline{AC} = \overline{AC}$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS 全等)
故 $\angle ABC = \angle ADC$
(2) 126°



2. (1) 連 $\overline{BD}$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$

$$\therefore \textcircled{1} \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\textcircled{2} \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$$

$$\textcircled{3} \overline{BD} = \overline{BD} \text{ (共用邊)}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (RHS 全等)

$$\text{故 } \overline{AD} = \overline{DC}$$

(2) 120

牛刀小試 9

1. 在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDE$

$$\therefore \textcircled{1} \overline{AD} = \overline{DC}$$

$$\textcircled{2} \overline{DG} = \overline{DE}$$

$$\textcircled{3} \angle ADG = \angle CDE = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE$ (SAS 全等)

$$\text{故 } \overline{AG} = \overline{CE}$$

2. (1) 13 (2) 13

3. $\triangle GAD$ 和 $\triangle EAB$

$$\textcircled{1} \overline{AG} = \overline{AE}$$

$$\textcircled{2} \overline{AD} = \overline{AB}$$

$$\textcircled{3} \angle GAD = 90^\circ + \angle EAD = \angle EAB$$

$\triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS 全等)

$$\text{故 } \overline{BE} = \overline{GD}$$

4. (1) 4 (2) 4 (3) 7 (4) $\sqrt{65}$ (5) $\sqrt{65}$

牛刀小試 10

1. (1) 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BFC$

$$\therefore \textcircled{1} \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\textcircled{2} \angle AEB = \angle BFC$$

$$\textcircled{3} \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\text{又 } \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle BFC$ (AAS 全等)

$$\text{故 } \overline{AE} = \overline{BF}$$

(2) 3, 5, 5

2. (17, 12)

3. (5, -12)

4. 4, 5, $5\sqrt{2}$

牛刀小試 11

1. $\triangle AEF$ 和 $\triangle CBE$

$$(1) \therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BCF \text{ (內錯角)}$$

$$(2) \angle AFE = \angle BFC \text{ (對頂角)}$$

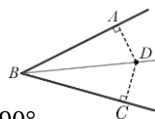
$$\triangle AEF \sim \triangle CBE \text{ (AA 相似)}$$

$$\therefore \overline{AF} : \overline{FC} = \overline{AE} : \overline{BC}$$

$$= 1 : 2$$

$$\text{故 } \overline{FC} = 2\overline{AF}$$

2. 2



3. 在 $\triangle OPQ$ 和 $\triangle ORS$ 中

$$\therefore \textcircled{1} \overline{OP} = 3\overline{OS}$$

$$\textcircled{2} \overline{OQ} = 3\overline{OR}$$

$$\textcircled{3} \angle POQ = \angle SOR \text{ (對頂角)}$$

$\therefore \triangle OPQ \sim \triangle ORS$ (SAS 相似)

$$\text{故 } \overline{PQ} = 3\overline{RS}$$

4. (1) 在 $\triangle ABE$ 中, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$
 $\angle AEF = 90^\circ$, $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$
 推得 $\angle 1 = \angle 3$

(2) 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ECF$ 中

$$\textcircled{1} \angle 1 = \angle 3$$

$$\textcircled{2} \angle B = \angle C = 90^\circ$$

$\triangle ABE \sim \triangle ECF$ (AA 相似)

牛刀小試 12

1. (1) $2n$ (n 為 0 或正整數)

(2) $2n+1$ (n 為 0 或正整數)

[或 $2n-1$ (n 為正整數)]

2. (1) $3n$ (n 為正整數)

(2) $5n$ (n 為正整數)

3. (1) $3n+1$ (n 為正整數)

(2) $5n+1$ (n 為正整數)

4. (1) $4n$ (n 為正整數)

(2) $4n+1$ (n 為 0 或正整數)

(3) $4n+2$ (n 為 0 或正整數)

(4) $4n+3$ (n 為 0 或正整數)

牛刀小試 13

1. $\therefore a$ 是偶數

設 $a = 2n$ (n 為整數)

$$a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$$

其中 $2n^2$ 是整數

$\therefore a^2$ 也是偶數

2. $\therefore a$ 是奇數, 設 $a = 2n+1$
 (n 為整數)

$$a+1 = 2n+1+1$$

$$= 2n+2$$

$$= 2(n+1)$$

其中 $n+1$ 為整數

故 $a+1$ 是偶數

3. (1) 偶數

(2) 奇數

(3) 偶數

(4) 偶數

4. (1) 偶數

(2) 奇數

(3) 偶數

(4) 奇數

5. (1) 奇數

(2) 偶數

(3) 偶數

(4) 奇數

牛刀小試 14

1. (1) $>$, $>$

(2) $<$, $<$

2. (1) $<$, $>$

(2) $>$, $<$

3. $<$, $<$, $(a+b)(a-b)$, $>$

4. (1) $>$, $>$

(2) $<$, $<$

5. (1) $>$, $<$

(2) $<$, $>$

6. $<$, $<$, $<$, $>$, $>$

牛刀小試 15

1. $a^2 = b^2 - 3^2 = (b-3)(b+3)$

$\therefore a, b$ 是正整數

$\therefore a^2$ 是 $(b+3)$ 的倍式

2. $a^2 + 5^2 = b^2$

$$a^2 = b^2 - 5^2$$

$$= (b+5)(b-5)$$

$\therefore a, b$ 是正整數

$\therefore a^2$ 是 $(b+5)$ 的倍數

3. C

4. C