數學 4 進階講義

橢圓的方程式和正焦弦長

淡水商工．蔡旭伶　老師

信望愛文教基金會

14-2-2~14-2-3　橢圓的方程式和正焦弦長

定理敘述

在同一平面上，到兩定點 F_1 與 F_2 之距離和為一定值 $2a(a>0)$ 的所有點所構成的圖形，

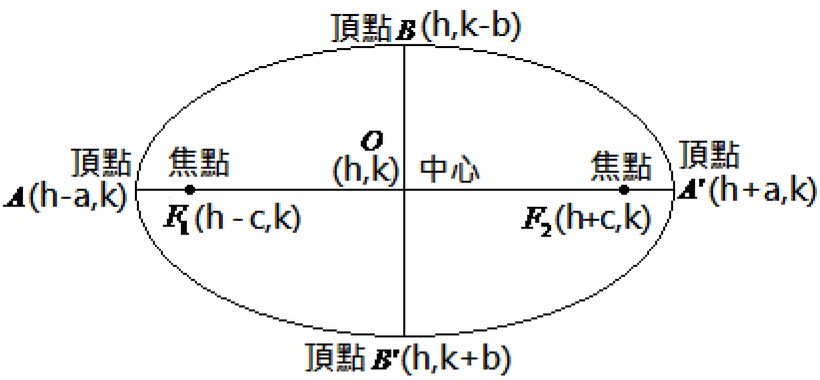
即滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ ，$\overline{F_1F_2}<2a$ 時的點 P 軌跡稱為橢圓。

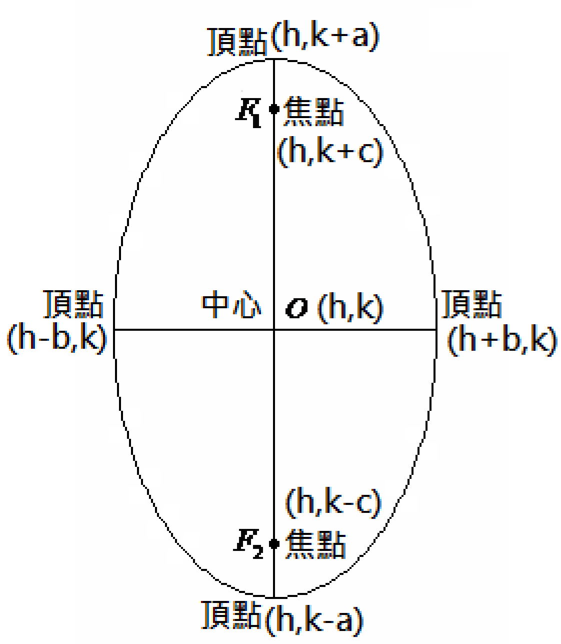
定理證明或說明

橢圓的標準式： $a^2>b^2>0$ ， $a^2=b^2+c^2$

	左右型	上下型
橢圓方程式	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中心	(h,k)	(h,k)
焦點	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
頂點	$(h\pm a,k)$ 、 $(h,k\pm b)$	$(h,k\pm a)$ 、 $(h\pm b,k)$
對稱軸	$x=h, y=k$	$x=h, y=k$
長軸長	$2a$	$2a$
短軸長	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$

參考下列圖形





關鍵字

橢圓、正焦弦

例題 1

求橢圓 $9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$ 的中心、焦點和頂點坐標及長軸和正焦弦長。

Ans：

整理成橢圓標準式 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$，上下型的橢圓，$a^2=9, b^2=4, c^2=5$

中心為 $(1,2)$，焦點 $(1,2\pm\sqrt{5})$，頂點 $(1,2\pm3),(1\pm2,2)$ 即 $(1,5),(1,-1),(3,2),(-1,2)$

長軸長 $2a=6$，正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$

例題 2

已知橢圓上一焦點 $(5,3)$，短軸上兩頂點 $(3,6),(3,0)$，求此橢圓方程式。

Ans：

由短軸上兩頂點 $(3,6),(3,0)$ 可得中心 $(3,3)$，$b=3$，此為上下型的橢圓

再由中心到焦點距離得 $c=2$，$a^2=b^2+c^2=13$，方程式 $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{13}=1$

例題 3

已知一橢圓的中心為$(7,0)$，一焦點$(4,0)$，正焦弦長$\frac{80}{7}$，求此橢圓方程式。

Ans：

橢圓的中心$(7,0)$和焦點$(4,0)$得知$c=9$，左右型的橢圓

再由正焦弦長$\frac{80}{7}=\frac{2b^2}{a}$，$80a=14b^2$，$40a=7b^2$

$a^2-b^2=c^2=9$，$7a^2-7b^2-63=0$，$7a^2-40a-63=0$，$(7a+9)(a-7)=0$

$a=-\frac{9}{7}$(不合)或 7，$40\times 7=7b^2$，$b^2=40$，方程式為$\frac{(x-7)^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$

例題 4

若方程式$\frac{(x-1)^2}{k-9}+\frac{(y+2)^2}{13-k}=1$的圖形為一橢圓，求$k$的範圍。

Ans：

由橢圓定義，$a^2>b^2>0$，$\begin{cases} k-9>0 \\ 13-k>0 \\ k-9\neq 13-k \end{cases} \Rightarrow \quad k<9<13$ 但 $k\neq 11$

例題 5

求與橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$共焦點，且過點$(3,8)$的橢圓方程式。

Ans：

方法一

由橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$得知$c^2=9$，兩焦點$F_1(-3,0),F_2(3,0)$

點$(3,8)$到兩焦點距離和為$\sqrt{(3+3)^2+8^2}+\sqrt{(3-3)^2+8^2}=10+18=2a$

得到$a=9$，$b^2=a^2-c^2=81-9=72$，橢圓方程式為$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1$

方法二：

因共焦點，可設橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{25+k}+\dfrac{y^2}{16+k}=1$

$(3,8)$ 代入 $\dfrac{9}{25+k}+\dfrac{64}{16+k}=1$，$9(16+k)+64(25+k)=(16+k)(25+k)$

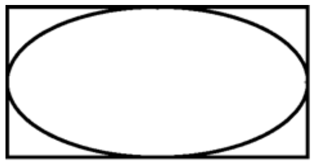
$k^2-32k-1344=0$，$(k-56)(k+24)=0$，$k=56$ 或 -24 代入檢查

(1) $k=56$，橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{72}=1$

(2) $k=-24$，橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{-8}=1$，不合

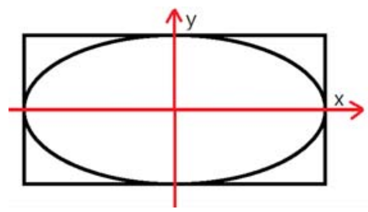
例題 6

一橢圓內切於一長 40cm，寬 60cm 的長方形，求此橢圓的正焦弦長。



Ans：

標上直角坐標，得知此橢圓為 $\dfrac{x^2}{900}+\dfrac{y^2}{400}=1$



$a=30, b=20$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{800}{30}=\dfrac{80}{3}$

溫故知新

習題 1

求橢圓 $25x^2+16y^2-32y-384=0$ 的中心、焦點坐標和正焦弦長。

習題 2

一橢圓的中心為原點，長軸長 8 且垂直 x 軸，正焦弦長 3，求此橢圓方程式。

習題 3

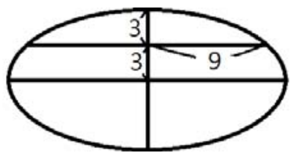
若方程式$\dfrac{x^2}{k+7}+\dfrac{y^2}{11-k}=1$的圖形為一長軸平行$x$軸的橢圓，求$k$的範圍。

習題 4

求與橢圓$\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{40}=1$共焦點，且過點$(0,4)$的橢圓方程式。

習題 5

右圖為一橢圓方程式圖形，求此橢圓的正焦弦長。



習題 6 【學測 99】

令橢圓$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$，$\Gamma_2:\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=2$，$\Gamma_3:\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=\dfrac{2x}{5}$ 的長軸長分別為ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，請問下列哪一個選項是正確的？

(A) $\ell_1=\ell_2=\ell_3$　(B) $\ell_1=\ell_2<\ell_3$　(C) $\ell_1<\ell_2<\ell_3$　(D) $\ell_1=\ell_3<\ell_2$　(E) $\ell_1<\ell_3<\ell_2$

習題 7 【學測 100】

在坐標平面上，圓C的圓心在原點且半徑為 2，已知直線L與圓C相交，請問L與下列哪些圖形一定相交？

(A) x軸　(B) $y=(\dfrac{1}{2})^x$　(C) $x^2+y^2=3$　(D) $(x-2)^2+y^2=16$　(E) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

習題 8 【學測 100】

設$E_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（其中$a>0$）為焦點在$(3,0)$，$(-3,0)$的橢圓；$E_2$：焦點在$(3,0)$且準線在$x=-3$拋物線。已知$E_1$，$E_2$的交點在直線$x=3$，則$a=$__________

解答與解析

習題 1：中心 $(0,1)$ ，焦點坐標 $(0,4)$ 和 $(0,-2)$ ，正焦弦長 $\frac{32}{5}$ 。

習題 2：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{16}=1$

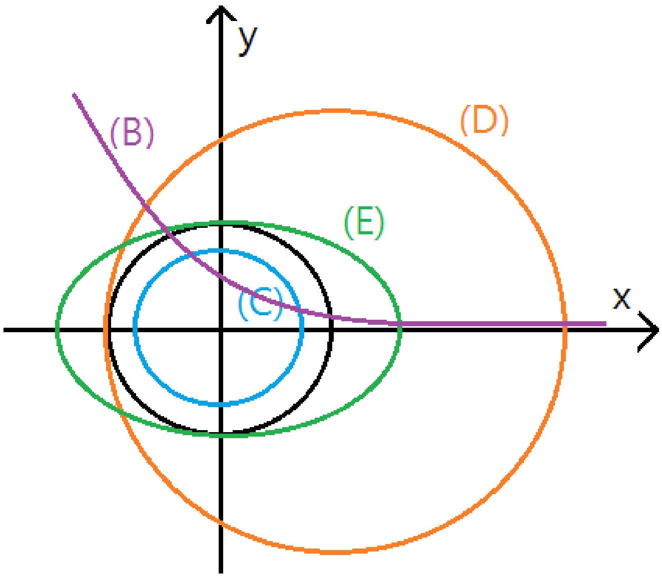
習題 3：$11>k>2$

習題 4：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

習題 5：$4\sqrt{3}$

習題 6：(D)

習題 7：(D) (E) 由圖形判斷



習題 8：$3\pm3\sqrt{2}$

由 $E_2: y^2=12x$ ，交點在 $x=3$ 代入，得到 $y=\pm6$

$E_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦點在 $(3,0)$ ，$(-3,0)$ ，得到 $c=3$ ， $a^2-9=b^2$

兩交點 $(3,6)$ ，$(3,-6)$ 垂直橢圓的焦點連線，

故 $(3,6)$ ，$(3,-6)$ 連線為橢圓的正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=12=\frac{2(a^2-9)}{a}$

$a^2-6a-9=0$ ， $a=3\pm3\sqrt{2}$ （負不合）