高中數學 進階講義

三角測量

陳清海　老師

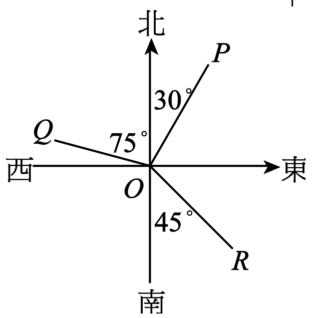
信望愛文教基金會

ok315 三角測量

主題一、三角測量

1. 測量名詞：
物體與地心的連線稱作鉛直線．而和鉛直線垂直的線都稱為水平線，視線與水平線所形成的夾角，分別稱作仰角與俯角．

2. 方位：如右圖所示：
P點位於O點的北$30°$東方位．
Q點位於O點的北$75°$西方位．
R點位於O點的南$45°$東（或東南）方位．



3. (1) 若是直角三角形，則利用三角函數的定義或畢氏定理解題．

(2) 若非直角三角形，則利用正弦定理或餘弦定理解題．

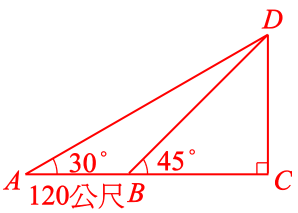
【例題 1】

某人於A點測得山頂的仰角為$30°$，由A點往此山前行 120 公尺至B點，再測得山頂的仰角為$45°$，此山頂的高度為多少公尺？

Ans：$60+60\sqrt{3}$公尺

【詳解】

依題意，繪製如圖，設$\overline{CD}=x$，



$\triangle ACD$ 中，$\dfrac{x}{\overline{AC}}=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以$\overline{AC}=\sqrt{3}x$，

$\triangle BCD$ 中，$\dfrac{x}{\overline{BC}}=\tan 45°=1$，所以$\overline{BC}=x$，

因為$\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=120$，即

$\sqrt{3}x-x=120 \Rightarrow x=\dfrac{120}{\sqrt{3}-1}=60\left(\sqrt{3}+1\right)$，

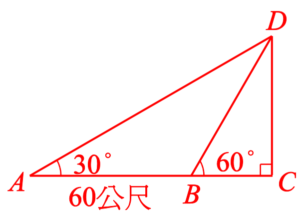
故山頂的高度為$60+60\sqrt{3}$公尺．

【類題 1】

某人測量一古塔的塔頂仰角為 30°，他再向塔前進 60 公尺後，測得塔頂之仰角為 60°，求塔高．

Ans：$30\sqrt{3}$ 公尺

【詳解】



依題意，繪製如圖，設 $\overline{CD}=x$，

$\triangle ACD$ 中，$\dfrac{x}{\overline{AC}}=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\overline{AC}=\sqrt{3}x$，

$\triangle BCD$ 中，$\dfrac{x}{\overline{BC}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，所以 $\overline{BC}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$，

因為 $\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=60$，即

$\sqrt{3}x-\dfrac{x}{\sqrt{3}}x=60 \Rightarrow x=30\sqrt{3}$，

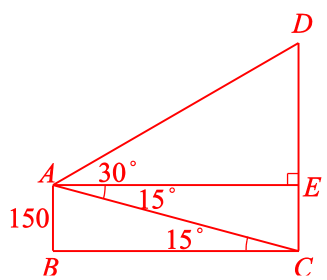
故古塔的高度為 $30\sqrt{3}$ 公尺．

【例題 2】

在一大廈的某一層窗口，測得對街某大樓樓頂的仰角為 30°，樓底的俯角為 15°，設窗口與地面的距離為 150 公尺，求此大樓的高度〔註：$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$〕．

Ans：$300+100\sqrt{3}$ 公尺

【詳解】



如圖，$\triangle ABC$ 中，

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$，

所以 $\overline{BC}=\dfrac{150}{2-\sqrt{3}}=150\left(2+\sqrt{3}\right)$，

$\triangle ADE$ 中，$\overline{AE}=\overline{BC}=150\left(2+\sqrt{3}\right)$，

$\overline{DE}=\overline{AE}\tan 30^\circ=150\left(2+\sqrt{3}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=150+100\sqrt{3}$

$\overline{CD}=150+150+100\sqrt{3}=300+100\sqrt{3}$，

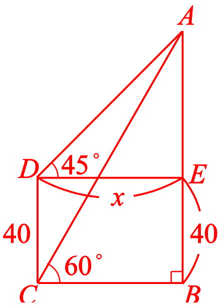
故此大樓高度為 $300+100\sqrt{3}$ 公尺．

【類題 2】

由塔底觀察某山頂，測得仰角 $60°$，又在塔頂觀察測得仰角為 $45°$，若塔高為 **40** 公尺，求山高．

Ans： $60+20\sqrt{3}$（公尺）

【詳解】



如圖，$\because \angle ADE=45°$，設 $\overline{DE}=\overline{AE}=x$ ．

$\triangle ABC$ 中，

$$\tan 60°=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{40+x}{x}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 40+x=\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow x=\frac{40}{\sqrt{3}-1}=20\left(\sqrt{3}+1\right)$$

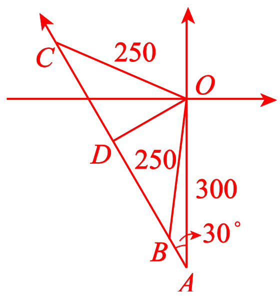
故山高為 $20\left(\sqrt{3}+1\right)+40=60+20\sqrt{3}$（公尺）.

【例題 3】

根據氣象局發布的颱風消息，颱風目前的中心位置在鵝鑾鼻正南方 **300** 公里處，以每小時 **50** 公里的速度朝北 **30°**西等速直線前進，暴風半徑為 **250** 公里．如果此颱風的速度方向及暴風半徑都不變，那麼鵝鑾鼻在暴風圈內前後共計多少小時?

Ans：8 小時

【詳解】



如右圖．

當暴風中心位於 B 處時，鵝鑾鼻恰好落入暴風圈內;

當暴風中心位於 C 處時，鵝鑾鼻恰好離開暴風圈．

因為 $\angle OAD=30°$，所以 $\overline{OD}=150$ ．

又因為$\triangle ODB$ 為直角三角形，

所以 $\overline{BD}=\sqrt{250^2-150^2}=200$ ．

因為$\triangle OCB$ 為等腰三角形，所以 $\overline{CD}=\overline{BD}$ ．

故 $\overline{BC}=400$ ．

由題意知，暴風以每小時 50 公里的速度前進，

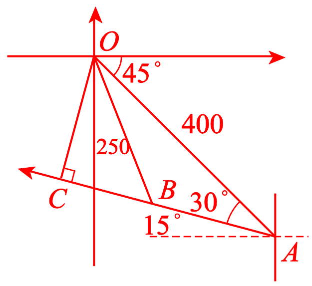
因此暴風由 B 至 C 共需花費 $\frac{400}{50}=8$ 小時．

即鵝鑾鼻在暴風圈內前後共 8 小時．

【類題 3】

根據氣象報告，在鵝鑾鼻東南方 400 公里的海面上有一個颱風，暴風半徑 250 公里，正以每小時 50 公里的速率朝「西$15°$北」的方向前進，若風速、風向及暴風半徑都不改變，則鵝鑾鼻在幾小時後開始進入暴風圈?

Ans：$4\sqrt{3}-3$（小時）



【詳解】

如右圖．設颱風中心在 B 點時，

O 點（鵝鑾鼻）開始進入暴風圈．

$\angle OAC=30°$

$\Rightarrow \overline{OC}=200$， $\overline{AC}=200\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\sqrt{250^2-200^2}=150$

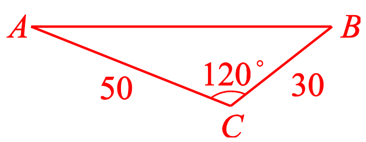
$\therefore \overline{AB}=200\sqrt{3}-150$

所求 $=\frac{200\sqrt{3}-150}{50}=4\sqrt{3}-3$（小時）.

【例題 4】

A，B為河兩岸邊兩點，不能直接丈量，今在C點測得 $\overline{AC}=50$公尺，$\overline{BC}=30$公尺，且$\angle ACB=120°$，試求 A，B兩點的距離．

Ans：70 公尺



【詳解】

依題意，繪製如圖，

$\overline{AB}^2=30^2+50^2-2\times30\times50\times\cos120°$

$=900+2500+1500$

$=4900$

$\Rightarrow \overline{AB}=70$，

故 A、B 兩點的距離為 70 公尺．

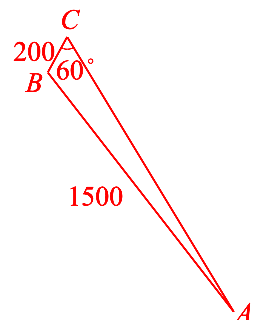
【類題 4-1】

平面上有 A，B，C三點．已知 B，C之間的距離是 **200** 公尺，B，A之間的距離是 **1500** 公尺，$\angle ACB=60^\circ$．請問 A，C之間距離最接近哪一個選項?

(1) 1500公尺． **(2)** 1600公尺． **(3)** 1700公尺． **(4)** 1800公尺．

Ans：(2)

【詳解】



設 $\overline{AC}=x$．

利用餘弦定理得知，

$$\cos 60^\circ=\frac{200^2+x^2-1500^2}{2\times 200\times x}$$

$\Rightarrow 200x=x^2-2210000$，

即 $x^2-200x-2210000=0$，解得

$$x=\frac{200\pm\sqrt{200^2+4\times 2210000}}{2}$$

$=100\pm\sqrt{10000+2210000}=100\pm 100\sqrt{222}$（負不合）

因為 $\sqrt{222}\approx 15$，所以 $x\approx 100+100\cdot 15=1600$．

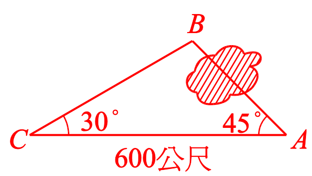
故選(2)．

【類題 4-2】

如右圖，欲測量 A，B兩點的距離，由於 A，B兩點之間有湖泊阻礙，於是在 A點這邊找一點 C，測得 $\overline{AC}=600$公尺，$\angle CAB=45^\circ$，$\angle BCA=30^\circ$，試求 $\overline{AB}$之長．

Ans：$300\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$（公尺）

【詳解】



$\angle ABC=180^\circ-45^\circ-30^\circ=105^\circ$

由正弦定理知 $\dfrac{600}{\sin 105^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}$

$$\Rightarrow \overline{AB}=\frac{600\times\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{600\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{1200}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$=300\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$（公尺）.

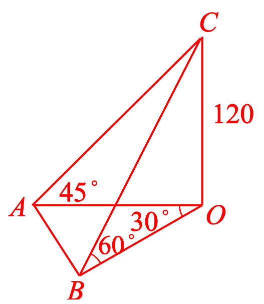
【例題 5】

一塔高 120 公尺，樹 A在塔的正西方，樹 B在塔的西 30°南．小明從塔的頂端測得樹 A底部的俯角為 45°，樹 B底部的俯角為 60°，求兩樹的距離．

Ans： $40\sqrt{3}$公尺

【詳解】

如右圖．



自塔頂 C 測得 A，B 的俯角分別為 45°，60°，

即自 A，B 測得塔頂 C 的仰角分別為 45°，60°．

因此，$\overline{OA}=\overline{OC}=120$，$\overline{OB}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{OC}=40\sqrt{3}$．

在△OAB 中，利用餘弦定理可得

$$\overline{AB}^2=120^2+\left(40\sqrt{3}\right)^2-2\times120\times40\sqrt{3}\times\cos30^\circ=4800$$

得 $\overline{AB}=40\sqrt{3}$．

故兩樹的距離為 $40\sqrt{3}$公尺．

【類題 5】

地面上 A、B二點相距 $20\sqrt{2}$公尺，今測得一屋頂 C之仰角分別為 30°，45°，且由 C測得 A、B二點之視角（即 $\angle ACB$）為 135°，求屋高．

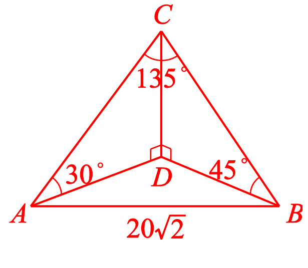
Ans： $4\sqrt{5}$公尺

【詳解】

設屋高 $\overline{CD}=x$，

$\Rightarrow \overline{AC}=2x$，$\overline{BC}=\sqrt{2}x$

△ABC 中，



$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos135°$

$\left(20\sqrt{2}\right)^2=(2x)^2+\left(\sqrt{2}x\right)^2-2\times2x\times\sqrt{2}x\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow x=4\sqrt{5}$，

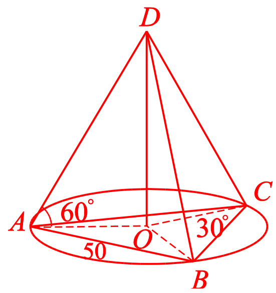
故屋高為 $4\sqrt{5}$ 公尺．

【例題 6】

自地面上 A，B，C 三點，分別測得空中一汽球的仰角皆為 $60°$，若 $\angle ACB=30°$，$\overline{AB}=50$ 公尺，求此汽球的高度．

Ans： $50\sqrt{3}$ 公尺

【詳解】



如右圖．假設汽球 D 的高度為 h 公尺．

因為自 A，B，C 測得汽球 D 的仰角皆為 $60°$，

所以 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$．

因此，O 為$\triangle ABC$ 的外心，

且外接圓半徑為 $\dfrac{h}{\sqrt{3}}$．

在$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，

即 $\dfrac{50}{\frac{1}{2}}=2\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}\Rightarrow h=50\sqrt{3}$．

因此，汽球的高度為 $50\sqrt{3}$ 公尺．

【類題 6】

自地面上 A，B，C 三點，分別測得一山頂之仰角皆為 $30°$，已知 $\overline{BC}=240$ 公尺，$\angle BAC=60°$，求此山之高度．

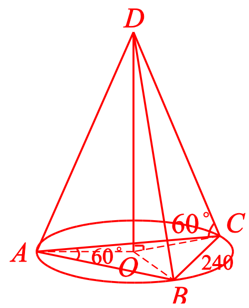
Ans：80 公尺

【詳解】

設山高 $\overline{DO}=x$ 公尺，

因為自 A，B，C 測得山頂 D 的仰角皆為 $30°$，

所以 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}x$.
因此，O 為$\triangle ABC$ 的外心，
且外接圓半徑為 $\sqrt{3}x$.



在$\triangle ABC$ 中， $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times\sqrt{3}x$,

即 $\dfrac{240}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times\sqrt{3}x\Rightarrow x=80$.

因此，山的高度為 80 公尺 .

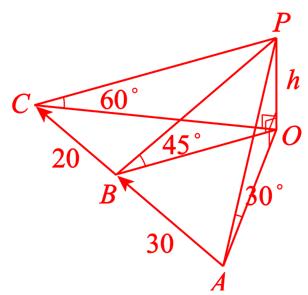
【例題 7】

一船在湖面上直線前進，若船的行進方向與飯店不共線，且起初測得湖邊飯店頂的仰角為 30°，前進 30 公尺後測得飯店頂的仰角為 45°，再前進 20 公尺後測得飯店頂的仰角為 60°，求飯店的高度 .

Ans： $10\sqrt{15}$ 公尺

【詳解】

如右圖 . 假設湖邊飯店的高度為 h 公尺 .
自 A，B，C 測得湖邊飯店頂 P 的仰角分別為 30°，45°，60° . 因此，



$\overline{OA}=\sqrt{3}\times\overline{OP}=\sqrt{3}h$,
$\overline{OB}=\overline{OP}=h$,
$\overline{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{OP}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

在$\triangle OBC$ 中， $\cos C=\dfrac{20^2+\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2-h^2}{2\times20\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1200-2h^2}{40\sqrt{3}h}$.

在$\triangle OAC$ 中， $\cos C=\dfrac{50^2+\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\sqrt{3}h\right)^2}{2\times50\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}}=\dfrac{7500-8h^2}{100\sqrt{3}h}$.

因此 $\dfrac{1200-2h^2}{40\sqrt{3}h}=\dfrac{7500-8h^2}{100\sqrt{3}h}$，

推得 $5\left(1200-2h^2\right)=2\left(7500-8h^2\right)\Rightarrow h=10\sqrt{15}$.

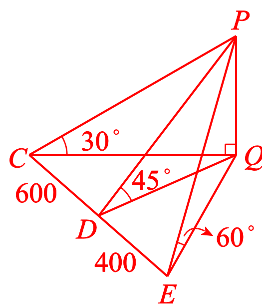
故飯店高度為 $10\sqrt{15}$ 公尺 .

【類題 7】

一直線上三點 C，D，E 測得山頂仰角分別為 $30°$，$45°$，$60°$（但 C，D，E 三點與山頂的垂足不共線），若 $\overline{CD}=600$ 公尺，$\overline{ED}=400$ 公尺，則山高為多少公尺?

Ans： $200\sqrt{15}$ 公尺

【詳解】



設山高 $\overline{PQ}=h$ 公尺，

則 $\overline{CQ}=\sqrt{3}h$，$\overline{DQ}=h$，$\overline{EQ}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，

$\triangle CDQ$ 中，$\cos C=\dfrac{\left(\sqrt{3}h\right)^2+600^2-h^2}{2\cdot\sqrt{3}h\cdot 600}$，

$\triangle CEQ$ 中，$\cos C=\dfrac{\left(\sqrt{3}h\right)^2+1000^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}h\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}h\cdot 1000}$，

因此 $\dfrac{\left(\sqrt{3}h\right)^2+600^2-h^2}{2\cdot\sqrt{3}h\cdot 600}=\dfrac{\left(\sqrt{3}h\right)^2+1000^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}h\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}h\cdot 1000}$

$\Rightarrow h=200\sqrt{15}$.

故山高為 $200\sqrt{15}$ 公尺 .

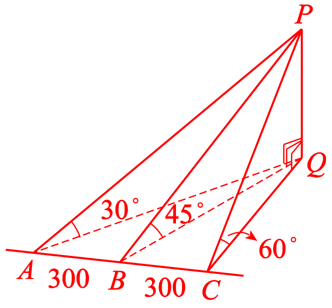
【例題 8】

由地面上三點 A，B，C 測得遠處一座山的仰角分別為 $30°$，$45°$，$60°$，已知 A，B，C 三點共線（但與山頂垂足不共線），且 $\overline{AB}=\overline{BC}=300$ 公尺，試求此座山的高度 .

Ans： $150\sqrt{6}$ 公尺

【詳解】

依題意作圖如右，設山高為 $\overline{PQ}=h$ 公尺



則 $\overline{AQ}=\sqrt{3}h$， $\overline{BQ}=h$， $\overline{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$.

在△QAC 中， B 為 $\overline{AC}$ 中點，

由三角形中線定理

$$\overline{AQ}^2+\overline{CQ}^2=2\left(\overline{BQ}^2+\overline{AB}^2\right)$$

$$\Rightarrow 3h^2+\frac{1}{3}h^2=2\left(h^2+300^2\right)$$

$$\Rightarrow h^2=135000$$

$$\Rightarrow h=150\sqrt{6}$$

所以山高是 $150\sqrt{6}$ 公尺 .

【類題 8】

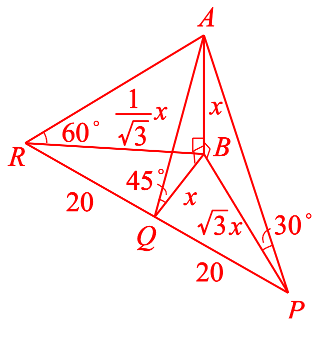
P， Q， R 為一條筆直公路上的三點，且 $\overline{PQ}=\overline{QR}=20$ 公尺，設公路旁有一大型廣告看板，今一人駕車行駛在公路上由 P， Q， R 觀測看板的頂端所得之仰角分別為 $30°$， $45°$， $60°$，求廣告看板的高度 .

Ans： $10\sqrt{6}$ 公尺

【詳解】

依題意作圖如右，

設看板的高度 $\overline{AB}=x$ 公尺



則 $\overline{BP}=\sqrt{3}x$， $\overline{BQ}=x$， $\overline{BR}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

在△BPR 中， Q 為 $\overline{PR}$ 中點，

由三角形中線定理得

$$\overline{BP}^2+\overline{BR}^2=2\left(\overline{BQ}^2+\overline{PQ}^2\right)$$

$$\Rightarrow 3x^2+\frac{1}{3}x^2=2\left(x^2+20^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2=600$$

$$\Rightarrow x=10\sqrt{6}，$$

故廣告看板的高度為$10\sqrt{6}$公尺．

主題二、三角函數值的求法

1. 三角函數值表：函數類別在上下，角度在左右．

角度	sin	cos	tan		
37°00′	.6018	.7986	.7536	1.327	53°00′
10′	.6041	.7969	.7581	1.319	50′
20′	.6065	.7951	.7627	1.311	40′
30′	.6088	.7934	.7673	1.303	30′
40′	.6111	.7916	.7720	1.295	20′
50′	.6134	.7898	.7766	1.288	10′
38°00′	.6157	.7880	.7813	1.280	52°00′
	cos	sin		tan	角度

(1) 查$0°$到$45°$時，角度看左邊（由上而下增加），函數看上方．
例如：$\cos 37°20' = 0.7951$．

(2) 查$45°$到$90°$時，角度看右邊（由下而上增加），函數看下方．
例如：$\sin 52°40' = 0.7951$．

2. 內插法：將三角函數圖形視為直線，利用相似三角形的概念求近似值．

【例題 9】

已知 $\sin 47°20'=0.7353$， $\sin 47°30'=0.7373$，求 $\sin 47°23'$ 的值．

Ans：0.7359

【詳解】

將θ與 sinθ列表如下：

		θ	sinθ		
		47°20′	0.7353		
	3′	47°23′	sin47°23′	k	
10′		47°30′	0.7373		0.002

推得 $\dfrac{k}{0.0020}=\dfrac{3}{10}\Rightarrow k=0.0006$ ．

得 $\sin 47°23'=0.7353+0.0006=0.7359$ ．

【類題 9】

已知 $\cos 38°10'=0.7862$， $\cos 38°20'=0.7844$，

求 $\cos 38°12'$ 之值．（四捨五入取小數點後四位數字）

Ans：0.7858

【詳解】

將θ與 cosθ列表如下：

		θ	sinθ		
		38°10′	0.7862		
	2′	38°12′	cos38°12′	k	
10′		38°20′	0.7844		0.0018

推得 $\dfrac{k}{0.0018}=\dfrac{2}{10}\Rightarrow k=0.00036$ ．

得 $\cos 38°12'=0.7862-0.00036=0.78584\approx 0.7858$ ．

【例題 10】

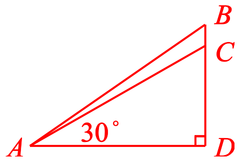
欲測量某大樓之高度，在大樓頂端插有一長為 5 公尺的旗杆，

從地面上一點測得旗杆頂的仰角為 35°，測得樓頂仰角為 30°，

求此大樓的高度．（四捨五入至小數第一位）

Ans：23.5 公尺

【詳解】



作圖如右，設樓高 $\overline{CD}=x$，

$\angle BAC=35°-30°=5°$，

$\angle ABC=90°-35°=55°$，

在$\triangle ACB$ 中，由正弦定理知：

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 55°}=\frac{5}{\sin 5°},$$

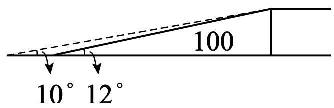
查表得 $\sin 5°=0.0872$， $\sin 55°=0.8192$，

故 $\overline{AC}\approx 46.97$，

$\overline{CD}=\overline{AC}\sin 30°=46.97\times 0.5\approx 23.5$

大樓的高度約為 23.5 公尺．

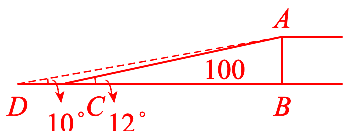
【類題 10-1】



一條上坡的人行步道長 100 公尺，坡度為 $12°$．為了方便老年人爬坡，欲重修此步道，若將坡度定為 10°，新步道應規劃長多少公尺？（答案四捨五入到整數位）

Ans：120 公尺

【詳解】



設 $\overline{AB}=h$，查表得

$\sin 12°=0.2079$， $\sin 10°=0.1736$，

$\triangle ABC$ 中， $h=100\sin 12°=20.79$，

$\triangle ABD$ 中， $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\sin 10°$， 即 $\dfrac{20.79}{\overline{AD}}=0.1736$，

$$\overline{AD}=\frac{20.79}{0.1736}=119.76\approx 120$$（公尺）．

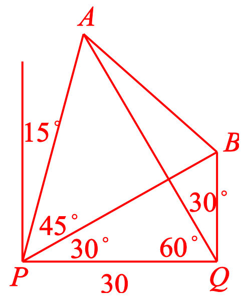
【類題 10-2】

有一艘郵輪往正東方向航行，在北 $15°$東發現燈塔 A，在北 $60°$東發現燈塔 B．郵輪繼續航行 30 公里後，再測得燈塔 A在北 $30°$西，燈塔 B在正北方．求燈塔 A與 B的距離．

Ans： $5\sqrt{30}$ 公里

【詳解】

如右圖所示，由題意知



$\angle APB=45°$， $\angle BPQ=30°$， $\angle BQA=30°$， $\angle AQP=60°$.

在△APQ 中，利用正弦定理得

$$\frac{\overline{PA}}{\sin 60°}=\frac{\overline{PQ}}{\sin 45°}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{PA}=\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ .$$

在△BPQ 中， $\overline{PB}=\dfrac{30}{\cos 30°}=20\sqrt{3}$.

在△PAB 中， $\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-2\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\cos\angle APB$，

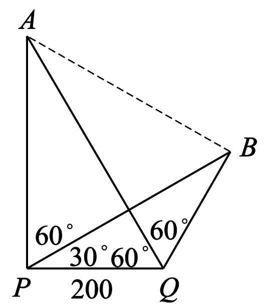
得 $\overline{AB}^2=\left(\dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(20\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot 20\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=750$，

得 $\overline{AB}=5\sqrt{30}$

故燈塔 A 與 B 的距離為 $5\sqrt{30}$ 公里 .

【類題 10-3】

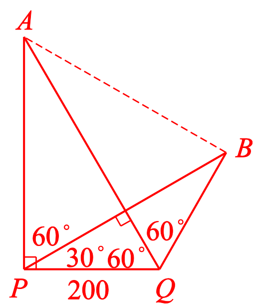
如圖所示， P與 Q是相距 200 公尺的兩個觀測站，欲測得對岸 A與 B兩點間的距離．今在 P點測得 $\angle APB=60°$， $\angle BPQ=30°$，又在 Q點測得 $\angle AQP=60°$， $\angle BQA=60°$．求 A與 B兩點的距離．



Ans： $200\sqrt{3}$ （公尺）

【詳解】

如圖所示，在△BQP 中，



因為 $\angle PQB=\angle PQA+\angle BQA=120°$，

且 $\angle BPQ=30°$， 故 $\angle PBQ=30°$.

即△BPQ 為等腰三角形 $\Rightarrow \overline{PQ}=\overline{QB}=200$

在△AQP 中， $\angle APQ=\angle APB+\angle BPQ=90^\circ$，
且 $\angle PQA=60^\circ$，所以 $\overline{AQ}=200\cdot 2=400$，
在△AQB 中，由餘弦定理得

$$\overline{AB}^2=\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2-2\times\overline{AQ}\times\overline{BQ}\times\cos 60^\circ$$

$$=400^2+200^2-2\cdot 400\cdot 200\cdot\frac{1}{2}$$

$$=160000+40000-80000=120000$$

故 A 與 B 兩點的距離為 $\sqrt{120000}=200\sqrt{3}$（公尺）.

ok315ex

基礎題

1. 某人隔河測一山高，在 A點觀測山時，山的方位為東 60°北，山頂的仰角為 45°，某人自 A點向東行 **600** 公尺到達 B點，山的方位變成在西 60°北，求山高．

Ans：600 公尺

【詳解】

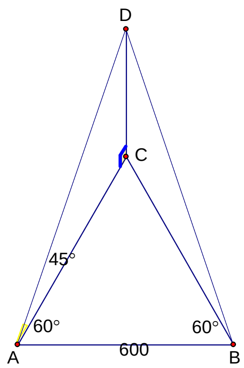
如右圖，

△ABC 為正三角形，故

$\overline{AC}=\overline{AB}=600$，

在△ACD 中，∠ACD＝90°，

故得 $\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\tan 45^\circ=600$(公尺).



2. 小明發現正北方仰角 60°處有一架飛機，且此架飛機正保持 $1000\sqrt{3}$公尺的高度，等速朝東方飛行，經過 **10** 秒後再測得飛機的仰角只有 45°，問飛機的速度每秒多少公尺?

Ans：$100\sqrt{2}$公尺

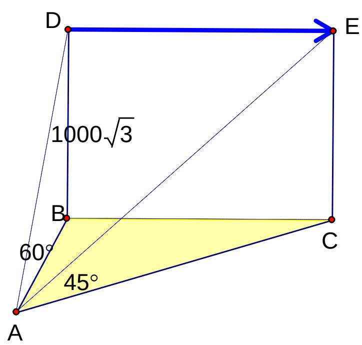
【詳解】

在△ABD 中，∠BAD＝60°，∠ABD＝90°，

故 $\overline{AB}=1000$。

在△ACE 中，∠EAC＝45°，∠ACE＝90°，

故 $\overline{AC}=1000\sqrt{3}$。



在△ABC 中，∠ABC＝90°，

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

$\Rightarrow 1000^2+\overline{BC}^2=(1000\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{BC}=1000\sqrt{2}$，

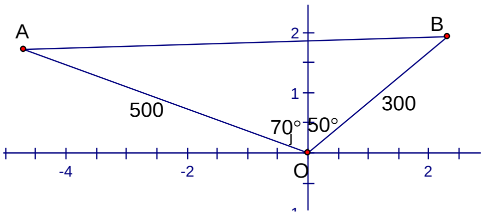
故每秒為 $\dfrac{1000\sqrt{2}}{10}=100\sqrt{2}$公尺。

3. **一漁船在湖上等速直線前進，已知上午 9 時 50 分，漁船在觀測點 O的北 70°西方向，離 O點 500 公尺處，上午 10 時 10 分則在觀測點 O的北 50°東，離 O點 300 公尺處，求此漁船每分鐘航行的速度．**

Ans：35 公尺

【詳解】

如右圖，利用餘弦定理



$$\overline{AB}^2=(500)^2+(300)^2-2\times500\times300\cos120°$$

$$=100^2[25+9-30\times(-\frac{1}{2})]$$

$$=100^2\times49$$

故 $\overline{AB}=700$(公尺)，

共走了 20 分鐘，

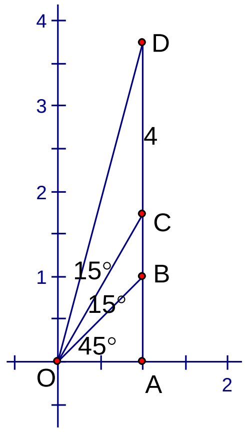
每分鐘走 $\frac{700}{20}=35$ 公尺。

4. **有一神像佇立於平臺上，此神站立於一朵大蓮花上．已知此神身長為 4 公尺．今在平地上一處測得平臺頂、神的腳底、神的頭頂的仰角分別為 45°， 60°和 75°，求平臺的高度．**

Ans：2 公尺

【詳解】

設平臺的高度 $\overline{AB}=\overline{OA}=x$，則



$\overline{AC}=x\cdot\tan60°=\sqrt{3}x$，

$\overline{AD}=x\cdot\tan75°=\overline{AC}+\overline{CD}=\sqrt{3}x+4$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})x=\sqrt{3}x+4$

$\Rightarrow x=2$。

【備註】

$\tan75°=2+\sqrt{3}$.

5. 自塔的正東方 A點測得塔頂仰角 $30°$，而在塔的東 $30°$南 B點測得塔頂仰角 $45°$．已知 A與 B相距 **60** 公尺，求塔高．

Ans：60 公尺

【詳解】

如圖，設塔高 h 公尺，

在△ACD 中，$\overline{AC}=\sqrt{3}h$，

在△BCD 中，$\overline{BC}=h$，

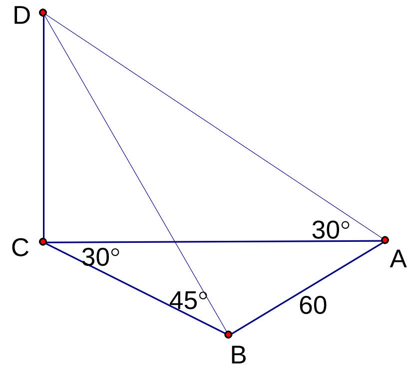
在△ABC 中，利用餘弦定理：

$(\sqrt{3}h)^2+h^2-2\cdot\sqrt{3}h\cdot h\cos30°=60^2$

$\Rightarrow 4h^2-2\sqrt{3}h^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=60^2$

$\Rightarrow h^2=60^2$

$\Rightarrow h=60.$



6. 已知 $\tan23°20'=0.4314$， $\tan23°30'=0.4348$，若 $\tan\theta=0.4331$，且 θ為銳角，求 θ．

Ans： $23°25'$

【詳解】

利用線性插植法：

$$\frac{x-20}{30-20}=\frac{0.4331-0.4314}{0.4348-0.4314}$$

$\Rightarrow x=20+\dfrac{17}{34}\times10=25$，

即$\theta=23°25'$.

【備註】

$\tan23°20'=0.43135789393291657051999551581001$

$\tan23°30'=0.43481237496093358966102824060006$

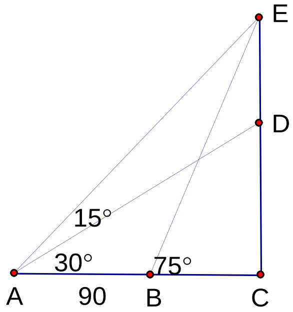
atand(0.4331)＝23.417436365453274404470440497832

進階題

7. 在某一地點測量山頂上高塔的塔頂與塔底，各得仰角為 $45°$與 $30°$，又向山走近 **90** 公尺後，測得塔頂的仰角為 $75°$，求山高．

Ans：$\left(45+15\sqrt{3}\right)$公尺

【詳解】



設山高 h 公尺，塔高 y 公尺，則

在△ACD 中，$\overline{AC}=\sqrt{3}h$，

在△ACE 中，$\overline{AC}=\overline{CE}=h+y$，

得$(\sqrt{3}-1)h=y$，

在△BCE 中，$\tan 75°=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$，

$\Rightarrow h+y=\overline{CE}=\overline{BC}\cdot\tan 75°$

$\Rightarrow h+y=(\sqrt{3}h-90)(2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow h+(\sqrt{3}-1)h=(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}h-90)$

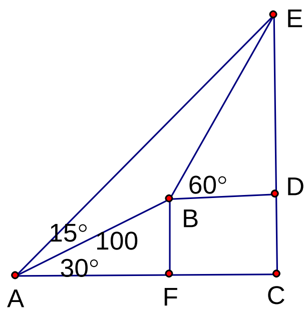
$\Rightarrow (2\sqrt{3}+3-1-\sqrt{3}+1)h=90(2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow h=\dfrac{90(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{90(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3}=15(3+\sqrt{3})$.

8. 某人於山麓測得山頂的仰角為 $45°$，由此山麓循 $30°$斜坡上行 **100** 公尺，再測得山頂的仰角為 $60°$，試求山高．

Ans：$50\left(\sqrt{3}+1\right)$公尺

【詳解】



如圖，設山高$\overline{CE}=h$，

在△ACE 中，$\overline{AC}=\overline{CE}=h$，

$\overline{BF}=100\cdot\sin 30°=100\cdot\dfrac{1}{2}=50$，

$\overline{AF}=100c.\cos 30°=100\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$，

在△BDE 中，

$\tan 60°=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\dfrac{h-50}{h-50\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

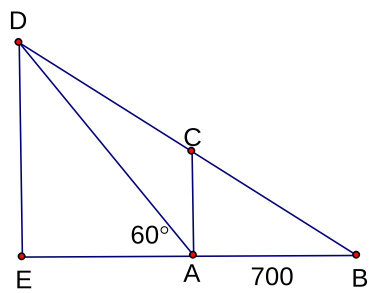
$\Rightarrow\ \sqrt{3}h-150=h-50$

$\Rightarrow h=\dfrac{100}{\sqrt{3}-1}=50(\sqrt{3}+1)$.

9. **一飛機在跑道上機場以固定的仰角及速度離開地面向西爬升．某人站在飛機起飛處正西方 700 公尺的地面上觀測．飛機起飛 5 秒後，正好經過此人正上方．再過 5 秒後，此人測得飛機的仰角為 60°，問：此飛機每秒飛行多少公尺？　【大考中心】**

Ans： $70\sqrt{7}$ 公尺

【詳解】



如圖，C 為 $\overline{BD}$ 的中點，

$\overline{AE}=\overline{AB}=700$，得

$\overline{DE}=700\cdot\tan 60^\circ=700\sqrt{3}$，

在△BDE 中，利用商高定理得

$\overline{BD}=\sqrt{1400^2+(700\sqrt{3})^2}=700\sqrt{7}$，

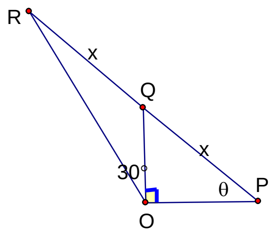
$\overline{BD}$ 中，飛機共飛行 10 秒，

此飛機每秒飛行 $\dfrac{700\sqrt{7}}{10}=70\sqrt{7}$ 公尺。

10. **某人在 O 點測量到遠處有一物作等速直線運動．開始時該物位置在 P 點，一分鐘後在 Q 點，且 $\angle POQ=90^\circ$．再過一分鐘後，該物位置在 R 點，且 $\angle QOR=30^\circ$．求 $\tan(\angle OPQ)$ 的值．**

Ans： $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】



如圖，設 $\overline{PQ}=\overline{QR}=x$，$\angle OPQ=\theta$，

則 $\angle ORQ=60^\circ-\theta$，$\overline{OQ}=x\cdot\sin\theta$.

在△OPR 中，利用正弦定理：

$$\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{OQ}}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{x\cdot\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$

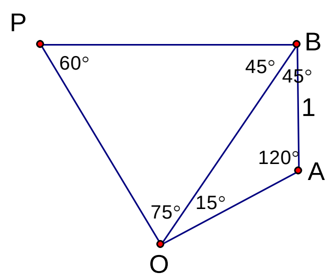
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

11. **海上有 A，B 二燈塔．B 位在 A 的正北 1 公里處．一船在 O 點望見 A，B 分別在北 60° 東、北 45° 東的方向．此船依北 30° 西的方向等速航行 10 分鐘後，到達 P 點，已知 P 點在 B 點的正西方，求此船每小時航行多少公里．　【大考中心】**

Ans：$\left(6\sqrt{3}+6\right)$公里

【詳解】

如圖，在△OAB 中，利用正弦定理：



$$\frac{1}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{OB}}{\sin 120^\circ}$$

得 $\overline{OB}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ ，

在△OBP 中，利用正弦定理：

$$\frac{\overline{OB}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{OP}}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{OP}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1.$$

此段距離航行 10 分鐘，

故每小時航行 $6(\sqrt{3}+1)$公里。