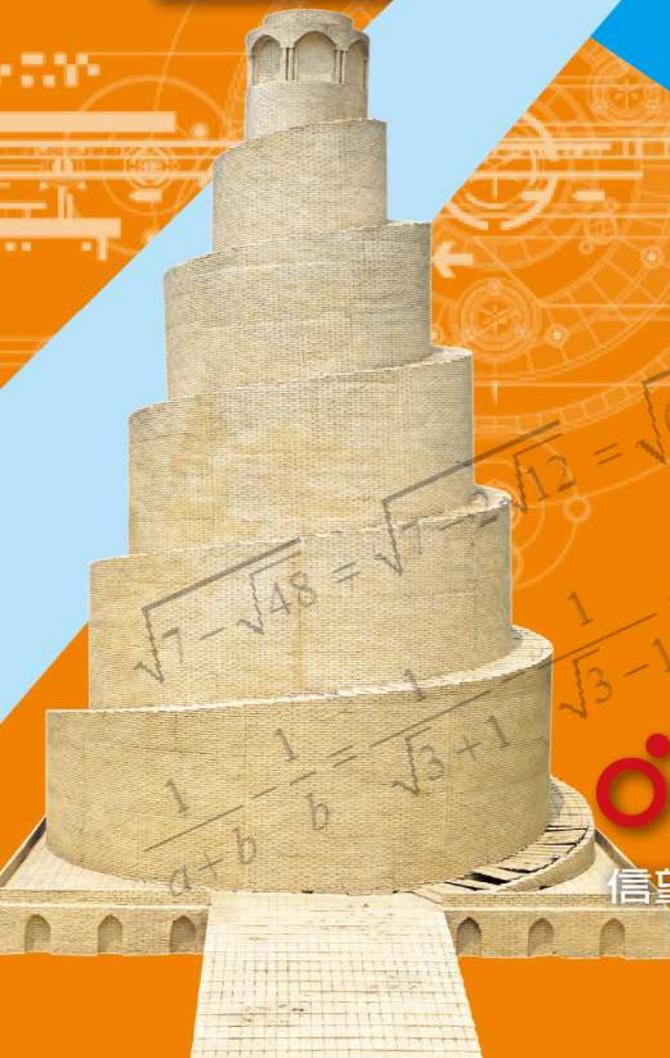


數學 2

進階
講義

取捨原理

淡水商工 · 方志元 老師



信望愛文教基金會



5-1-7 取捨原理

定理敘述

1. 兩個集合的取捨原理（排容原理）：

設 A 、 B 為兩集合，則 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2. 三個集合的取捨原理（排容原理）：

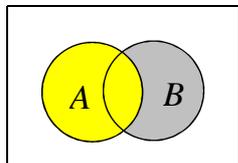
設 A 、 B 、 C 為三集合，則

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

定理證明或說明

1. 兩個集合的取捨原理：

我們利用文氏圖來說明。

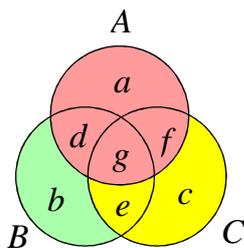


當 $n(A)$ 與 $n(B)$ 相加時，兩個圓圈重疊的部份會加了兩次，也就是多加了一個 $n(A \cap B)$ ；若計算 $n(A \cup B)$ 就必需要用 $n(A) + n(B)$ 再減掉中間重複的部份，即

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2. 三個集合的取捨原理：

如下圖，將各區域給定名稱，則



計算 $n(A) + n(B) + n(C)$ 時， a 、 b 、 c 這三個區域只加了一次，而 d 、 e 、 f 這三個區域各加了兩次，中間 g 這個區域加了三次。

為了扣除重複的，我們先扣除兩兩集合的交集：

$$n(A \cap B) \text{ 即 } d + g, \quad n(B \cap C) \text{ 即 } e + g, \quad n(A \cap C) \text{ 即 } f + g$$

此時 g 這個區域一共被扣了三次，如此來就沒有算到這個區域了，故必需再加回一次，又 g 這個區域恰為 $n(A \cap B \cap C)$ ，可知

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



關鍵字

取捨原理、排容原理

例題 1

某班共有 40 個學生，在一次的段考中，有 30 個人數學不及格，有 25 個人英文不及格，兩科都不及格的共有 20 人，試問數學、英文這兩科至少一科不及格的有多少人？

Ans :

令 A 表數學不及格的人所組成的集合， B 表英文不及格的人所組成的集合，則兩科都不及格的人為 $A \cap B$ ，數學、英文至少一科不及格的人為 $A \cup B$ 。由取捨原理可知

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 25 - 20 = 35 \text{ 人。}$$

例題 2

在 1 到 100 的整數中，不是 3 也不是 5 的倍數的數一共有多少個？

Ans :

令 A 表示 1 到 100 的整數中所有 3 的倍數組成的集合，

B 表示 1 到 100 的整數中所有 5 的倍數組成的集合。

則 $A \cap B$ 表示 1 到 100 的整數中同時為 3 的倍數及 5 的倍數的集合，也就是 15 的倍數。

$$\text{計算 } 100 \div 3 = 33 \cdots 1$$

$$100 \div 5 = 20$$

$$100 \div 15 = 6 \cdots 10$$

可知 $n(A) = 33$ 、 $n(B) = 20$ 、 $n(A \cap B) = 6$ ，則

是 3 或 5 的倍數的數共有

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$$

不是 3 也不是 5 的倍數共有 $100 - 47 = 53$ 個。

溫故知新

習題 1

某班有 50 人，在一次的考試中，國文及格的有 30 人，數學及格的有 35 人，英文及格的有 33 人，國文及數學皆及格的有 25 人，國文及英文皆及格的有 28 人，數學及英文皆及格的有 20 人，其中有 10 人三科都及格，則國文、數學及英文這三科至少一科及格的有幾人？

習題 2

在 1 到 200 的正整數中，是 2 的倍數或 3 的倍數一共有多少個？

解答與解析

習題 1：35 人

習題 2：133 個

延伸閱讀

1. 四個集合的取捨原理：

若 A 、 B 、 C 、 D 為四個集合，則

$$n(A \cup B \cup C \cup D)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$$

$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D)$$

$$+ n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)$$

$$- n(A \cap B \cap C \cap D)$$

2. 觀察二個、三個及四個集合的取捨原理可知，要計算四個集合以上的聯集，需先將單一集合的個數相加，再扣掉任兩個集合的交集，兩加上任三個集合的交集，再扣掉任四個集合的交集……，依此類推。