數學 4 進階講義

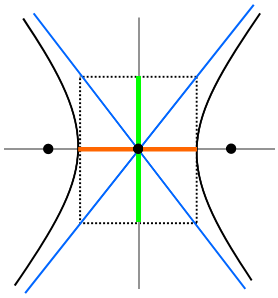
雙曲線的漸進線

淡水商工・方志元　老師

信望愛文教基金會

14-3-4　雙曲線的漸近線

定理敘述



(1)右圖為一雙曲線，雙曲線可無限延伸，且會愈來愈靠近圖中兩條藍色直線，但不會有交點，我們稱此兩直線為漸近線。

(2)漸近線的性質：

(a) 兩漸近線的交點為雙曲線的中心。

(b) 由右圖可知兩漸近線剛好是由貫軸及共軛軸所成矩形的對角線。

(c) 若 P 為雙曲線上任一點。則 P 到兩漸線的距離乘積為定值 $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$ 。

(d) 漸近線方程式：

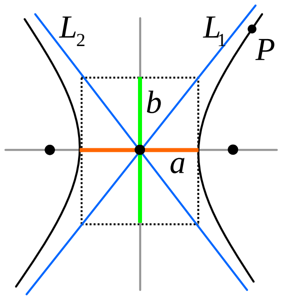
貫軸平行 x 軸（左右型）　$b(x-h)\pm a(y-k)=0$

貫軸平行 y 軸（上下型）　$a(x-h)\pm b(y-k)=0$

(3)若 $L_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ 及 $L_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ ，

則雙曲線方程式可假設為 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$ ，k 為實數。

定理證明或說明



(1)當雙曲線一直延伸下去時，與漸近線的距離會愈來愈接近 0，但永遠不會碰到。

(2)如右圖，假設此左右型雙曲線標準式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

我們將說明由貫軸及共軛軸所成矩形的對角線即為漸近線：

由圖形可知 L_1 的斜率為 $\dfrac{b}{a}$ ，且過中心(0,0)，故 L_1 方程式為 $bx-ay=0$ ；

L_2 的斜率為 $-\dfrac{b}{a}$ ，亦過(0,0)，故 L_2 方程式為 $bx+ay=0$

設 $P(x_0, y_0)$ 為雙曲線上一點，d_1 為 P 到 L_1 的距離，d_2 為 P 到 L_2 的距離，則：

$$d_1 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{，} d_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

兩式相乘得 $d_1 \times d_2 = \dfrac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \dfrac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2+b^2}$

又 P 在雙曲線上，則 $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ 代入上式得

$$d_1 \times d_2 = \frac{|a^2b^2|}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$ 為一定值

也就是說，當 P 點在第一象限愈遠離中心點時，會離 L_1 愈來愈近，距離接近於 0；

並離 L_2 愈來愈遠，但卻不會與 L_1 有交點，故可知 L_1 為此雙曲線的漸近線。

同理，L_2 也是此雙曲線的漸近線。

若中心點從(0,0)平移到(h,k)，則兩漸近線變為 $b(x-h)-a(y-k)=0$ 與 $b(x-h)+a(y-k)=0$。

同理可證，上下型的雙曲線 $-\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ 的兩漸近線為 $a(x-h) \pm b(y-k) = 0$

(3)考慮左右型的雙曲線 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} \pm \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$，由前面的討論可知其漸近線為 $b(x-h) \pm a(y-k) = 0$。

將兩個漸近線相乘得：

$$[b(x-h)+a(y-k)][b(x-h)-a(y-k)] = 0$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = 0 \qquad (※1)$$

將雙曲線標準式兩邊同乘 a^2b^2 得

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \qquad (※2)$$

比較(※1)、(※2)兩式，可發現兩式僅在等號的右邊不同。但我們卻不能直接以 a^2b^2 當成 k，因為 a、b 可能有公因數，產生的漸近線可能會不相同。舉例說明如下：

考慮左右型的雙曲線 $\Gamma_1 : \dfrac{x^2}{6^2} - \dfrac{y^2}{10^2} = 1$，漸近線為 $10x \pm 6y = 0$，同除以 2 得 $5x \pm 3y = 0$；

考慮另一左右型雙曲線 $\Gamma_2 : \dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$，其漸近線亦為 $5x \pm 3y = 0$，與 Γ_1 的漸近線相同。

若直接拿 $(5x-3y)(5x+3y) = 5^2 3^2$ 當作雙曲線方程式，就無法得到 Γ_1 的方程式。

故必需假設 $(5x-3y)(5x+3y)=k$，再利用其他條件求 k 的值。

注意事項

(1)可將漸近線化成：

左右型： $\dfrac{x-h}{a}\pm\dfrac{y-k}{b}=0$ 上下型： $\dfrac{x-h}{b}\pm\dfrac{y-k}{a}=0$

就像是將原來的標準式把平方拿掉，中間項加「±」，等號後面的 1 改為 0。

(2)不同的雙曲線會有相同的漸近線。

(3)左右型的雙曲線，其漸近線斜率為 $\pm\dfrac{b}{a}$；上下型的雙曲線，其漸近線為 $\pm\dfrac{a}{b}$。

關鍵字

雙曲線、標準式、漸近線

例題 1

已知一雙曲線的標準式為 $\dfrac{(x-3)^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$，試求此雙曲線的兩漸近線。

Ans：

將雙曲線化成 $\dfrac{(x-3)^2}{6^2}-\dfrac{y^2}{8^2}=1$，則兩漸近線為 $8(x-3)\pm 6y=0$，化簡得 $4x-3y-12=0$ 與 $4x+3y-12=0$。

例題 2

已知雙曲線的兩漸近線為 $x-2y=3$ 與 $x+2y=-1$，且過點 $(3,-1)$，求此雙曲線的方程式。

Ans：

整理兩漸近線為 $x-2y-3=0$、$x+2y+1=0$

設雙曲線方程式為 $(x-2y-3)(x+2y+1)=k$

點 $(3,-1)$ 代入得　　$(3+2-3)(3-2+1)=k=4$

故雙曲線方程式為　　$(x-2y-3)(x+2y+1)=4$

整理得標準式為　　$\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$

例題 3

已知雙曲線的一條漸近線斜率為 $-\dfrac{3}{4}$，中心點為 $(-2,2)$，兩焦點距離為 30，貫軸平行 y 軸，試求此雙曲線的方程式。

Ans：

因為貫軸平行 y 軸，故此漸近線為上下型；又中心點為 $(-2,2)$，

故其標準式為 $-\dfrac{(x+2)^2}{b^2}+\dfrac{(y-2)^2}{a^2}=1$，其漸近線斜率為 $\pm\dfrac{a}{b}$。

依題意，一條漸近線的斜率為 $-\dfrac{3}{4}$，可設 $a=3t$，$b=4t$；

又兩焦點距離為 30，即 $2c=30$，$c=15$，以及 $c^2=a^2+b^2$ 可知：

$$15^2=(3t)^2+(4t)^2$$

整理得　　$225=25t^2$

t 取正值得　　$t=3$

故 $a=3t=9$，$b=4t=12$，漸近線方程式為 $-\dfrac{(x+2)^2}{12^2}+\dfrac{(y-2)^2}{9^2}=1$

溫故知新

習題 1

一雙曲線的方程式為 $x^2-9y^2=-9$，試求其漸近線方程式。

習題 2

已知雙曲線的方程式為 $4x^2-9y^2+24x+36y-36=0$，

試求：(1)漸近線方程式　(2)若 P 為雙曲線上一點，則 P 到兩漸近線的距離乘積為何？

習題 3

已知一雙曲線的兩漸近線為 $x+y=0$ 與 $x-y=0$，且點 $P(2,1)$ 在雙曲線上，試求此雙曲線的標準式。

習題 4

坐標平面上一雙曲線，其中一條漸近線為 $3x+y-2=0$，中心點為(0,2)，則另一條雙曲線為何？

解答與解析

習題 1：$x\pm 3y=0$。

習題 2：(1) $2x-3y+12=0$、$2x+3y=0$　(2) $\dfrac{36}{13}$。

習題 3：$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$。

習題 4：$3x-y+2=0$。