

數學 1 進階講義

二元一次方程式的根

景美女中 · 李冠達老師



信望愛文教基金會

2-3-2 一元二次方程式的根

定理敘述

一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解為 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (其中 $D = b^2 - 4ac$)

定理證明或說明

1. 方程式的基本概念：

(1) 假設 $f(x)$ 是實係數 n 次多項式，則 $f(x) = 0$ 稱為實係數 n 次多項式方程式，或簡稱為 n 次方程式。

(2) 實根(解)的幾何意涵：

① n 次方程式 $f(x) = 0$ ，若 α 滿足 $f(\alpha) = 0$ ，那麼 α 就稱為 $f(x) = 0$ 的根或解，當 α 為實數時，就稱 α 為實根。同理，當 α 為有理數時，就稱 α 為有理根。

② 方程式 $f(x) = 0$ 的『實根 α 』，就是函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交點的『橫坐標』。

(3) 解方程式：解 n 次方程式就是求該方程式的根。

求『解』(根)的過程稱為解方程式。

2. 解一元二次方程式：

(1) 公式解：一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解為 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (其中 $D = b^2 - 4ac$)

(2) 一元二次方程式『實根』的個數：由判別式 $D = b^2 - 4ac$ 來判斷

判別式 D	根的個數	圖形與 x 軸相交情形
$D > 0$	兩相異實根	交於相異兩點
$D = 0$	兩相同實根 (重根)	相切
$D < 0$	沒有實根	不相交

注意事項

1. 若方程式有解，則 $D \geq 0$ （包含重根）。
2. 若一元二次多項式函數與 x 軸有交點，則 $D \geq 0$ （包含相切）。

關鍵字

公式解、判別式

單元內容

例題 1

試解 $13x^2 - 8x + 1 = 0$

Ans :

由公式解，先求 $D = (-8)^2 - 4(13)(1) = 64 - 52 = 12$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{12}}{2 \times 13} = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2 \times 13} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{13}$$

解為兩相異實根 $x = \frac{4 + \sqrt{3}}{13}$ 或 $\frac{4 - \sqrt{3}}{13}$

例題 2

試解 $25x^2 - 30x + 9 = 0$

Ans :

由公式解，先求 $D = (-30)^2 - 4(25)(9) = 900 - 900 = 0$

因為 $D = 0$ ，得知兩根為相同實根，

$$x = \frac{-(-30)}{2 \times 25} = \frac{3}{5} \quad (\text{二重根})$$

例題 3

試解 $7x^2 - 5x + 2 = 0$

Ans :

由公式解，先求 $D = (-5)^2 - 4(7)(2) = 25 - 56 = -31 < 0$

因為 $D < 0$ ，得知此方程式無實根。

但其複數根為 $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{-31}}{2 \times 7} = \frac{5 \pm \sqrt{31}i}{14}$

例題 4

試解 $(x-3)(2x+1) = x^2$

Ans :

先展開得 $2x^2 - 5x - 3 = x^2$

化簡後得 $x^2 - 5x - 3 = 0$

由公式解， $D = (-5)^2 - 4(1)(-3) = 25 + 12 = 37$

$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{37}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

解為兩相異實根 $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$ 或 $\frac{5 - \sqrt{37}}{2}$

例題 5

試解 $x^2 + \sqrt{3}x + x + \sqrt{3} = 0$

Ans :

此題除了可以使用公式解外，亦可利用提公因式的方法，

$$x(x + \sqrt{3}) + (x + \sqrt{3}) = 0$$

$$(x + \sqrt{3})(x + 1) = 0 \quad \text{解得 } x = -\sqrt{3} \text{ 或 } -1$$

例題 6

設 $a + c \neq b$ ，且 $a \neq b$ ，試求 $((a + c - b)x^2 + 2cx + (b + c - a)) = 0$ ，有多少個實根？

Ans :

因為 $a+c \neq b$ 得知 $a+c-b \neq 0$ ，此方程式為一元二次方程式，
利用判別式討論其解，

$$\begin{aligned} D &= (2c)^2 - 4(a+c-b)(b+c-a) \\ &= 4(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 4(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

又 $a \neq b$ ，得知 $D > 0$ ，因此，此方程式有兩相異實根。

例題 7

設 k 是實數，試決定 k 的值，使得一元二次方程式 $kx^2 + 4x + 9 = 0$ ，試求：

(1) 有兩相異實根 (2) 有兩相同實根 (3) 沒有實根

Ans :

判別式 $D = (4)^2 - 4 \times k \times 9 = -36k + 16$

(1) 有兩相異實根： $D = -36k + 16 > 0$ ，即 $k < \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

(2) 有兩相同實根： $D = -36k + 16 = 0$ ，即 $k = \frac{4}{9}$

(3) 沒有實根： $D = -36k + 16 < 0$ ，即 $k > \frac{4}{9}$



溫故知新

習題 1

試解：(1) $14x^2 - 17x - 6 = 0$ (2) $x^2 + 5x + 2 = 0$

習題 2

使 $x^2 + kx + (k^2 - 6) = 0$ 有兩相異實數解，這樣的整數 k 共有多少個？

習題 3

設 p 為實數，方程式 $3x^2 - px + 2 = 0$ 有相等實根，試求 p 之值。

習題 4

若方程式 $kx^2 - 5x + 2 = 0$ 之兩根相等，試求 k 之值。

習題 5

設 $x^2 + 2x + (k-1) = 0$ ，試依下列各小題的條件，求出實數 k 的範圍。

(1) 兩根為相異實根 (2) 兩根為相等實根 (3) 沒有實根

習題 6

設一元二次方程式 $2x^2 + 3x + k = 0$ 有實根，則實數 k 的範圍為何？



解答與解析

習題 1 : (1) $x = -\frac{2}{7}$ 或 $\frac{3}{2}$ (2) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

習題 2 : 5 個， $k = -2, -1, 0, 1, 2$ 。

習題 3 : $p = \pm 2\sqrt{6}$

習題 4 : $k = \frac{25}{8}$

習題 5 : (1) $k < 2$ (2) $k = 2$ (3) $k > 2$

習題 6 : $k \leq \frac{9}{8}$