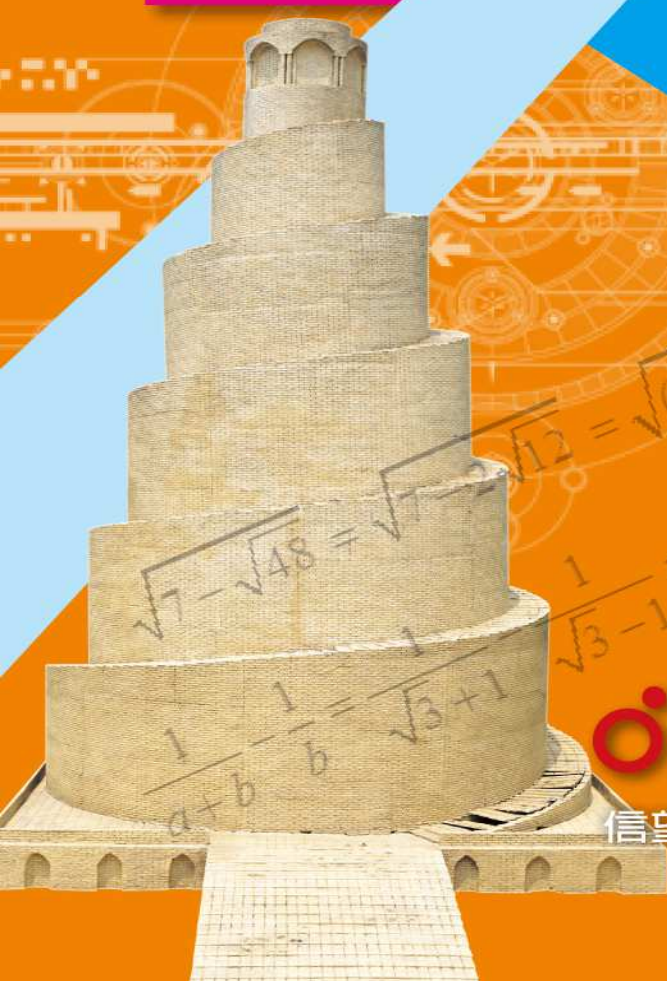


高中數學

進階
講義

組合

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\div$

lt99ok223 組合

主題一、異物組合

1. 從 n 個不同的事物中取出 k 個的排列數 P_k^n 是組合數 C_k^n 的 $k!$ 倍，即

$$C_k^n \times k! = P_k^n .$$

2. 從 n 個不同事物中取出 k 個（ $0 \leq k \leq n$ ）為一組，其組合數 C_k^n 為

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

【例題 1】【配合課本例 1】

求下列各數：

(1) C_2^8 , (2) C_6^8 , (3) C_8^8 , (4) C_0^8 .

Ans : (1) 28 , (2) 28 , (3) 1 , (4) 1

【詳解】

$$(1) \quad C_2^8 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 .$$

$$(2) \quad C_6^8 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 .$$

$$(3) \quad C_8^8 = \frac{8!}{8!0!} = 1 .$$

$$(4) \quad C_0^8 = \frac{8!}{0!8!} = 1 .$$

【類題 1】

請在下列空格內填入適當的數字：

(1) $C_2^6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $C_4^7 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\frac{P_4^{10}}{C_4^{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Ans : (1) 15 , (2) 35 , (3) 24

【詳解】

$$(1) \quad C_2^6 = \frac{6!}{2!4!} = 15 .$$

$$(2) \quad C_4^7 = \frac{7!}{4!3!} = 35 .$$

$$(3) \quad \text{因為 } P_4^{10} = C_4^{10} \times 4! , \text{ 所以 } \frac{P_4^{10}}{C_4^{10}} = 4! = 24 .$$

【例題 2】【配合課本例 2】

從 10 個排球選手中選出 6 人上場比賽 .

(1) 共有多少種選法？

(2) 若其中甲乙兩人定位為舉球員，必恰選一人，則共有多少種選法？

Ans : (1) 210 , (2) 112

【詳解】

(1) 從 10 人中任選 6 人的方法有

$$C_6^{10} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210 \text{ (種)} .$$

(2) 先從甲乙兩人選一人當舉球員有 C_1^2 種選法，

再從剩下的 8 個人中任選 5 人有 C_5^8 種選法．

利用乘法原理，得選法共有

$$C_1^2 \times C_5^8 = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{8!}{5!3!} = 2 \times 56 = 112 \text{ (種)} .$$

【類題 2】

從 8 個籃球隊員中選出 5 人上場比賽．

(1) 共有多少種選法？

(2) 若其中甲乙兩人是主力戰將一定要上場，則共有多少種選法？

Ans：(1) 56，(2) 20

【詳解】

(1) 從 8 人中任選 5 人的方法有

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ (種)} .$$

(2) 依題意，得選法共有 $C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ (種)} .$

【例題 3】【常考題】

(1) 將 a, b, c, d, e, f, g 共七個字母排一列，求 e, f, g 完全分開的方法數．

(2) 將 a, b, c, d, e, e, e 共七個字母排一列，求三個 e 完全分開的方法數．

Ans：(1) 1440，(2) 240

【詳解】

(1) 先將 a, b, c, d 排成一列，

再從 a, b, c, d 的 5 個空隙中選出 3 個空隙，

最後將 e, f, g 排入 3 個空隙，故排法共有

$$4! \times C_3^5 \times 3! = 24 \times 10 \times 6 = 1440 \text{ (種)} .$$

(2) 先將 a, b, c, d 排成一列，

再從 a, b, c, d 的 5 個空隙中選出 3 個空隙，
最後將 e, e, e 排入 3 個空隙，故排法共有

$$4! \times C_3^5 \times 1 = 24 \times 10 \times 1 = 240 \text{ (種)} .$$

【類題 3】

- (1) 將 a, b, c, d, e 共五個字母排成一列，求 d, e 完全分開的方法數。
(2) 將 a, b, c, e, e 共五個字母排成一列，求二個 e 完全分開的方法數。

Ans : (1) 72 , (2) 36

【詳解】

- (1) 先將 a, b, c 排成一列，
再從 a, b, c 的 4 個空隙中選出 2 個空隙，
最後將 d, e 排入 2 個空隙，故排法共有

$$3! \times C_2^4 \times 2! = 6 \times 6 \times 2 = 72 \text{ (種)} .$$

- (2) 先將 a, b, c 排成一列，
再從 a, b, c 的 4 個空隙中選出 2 個空隙，
最後將 e, e 排入 2 個空隙，故排法共有

$$3! \times C_2^4 \times 1 = 6 \times 6 \times 1 = 36 \text{ (種)} .$$

【例題 4】【配合課本例 3】

從男生 6 人，女生 5 人中選出 5 人組成委員會。

- (1) 選出 2 名男生 3 名女生的選法共有多少種？
(2) 若規定男女生至少各有 2 人，則共有多少種選法？

Ans : (1) 150 , (2) 350

【詳解】

- (1) 先從 6 名男生中選出 2 人有 C_2^6 種選法，

再從 5 名女生中選出 3 人有 C_3^5 種選法。

利用乘法原理，得選法共有 $C_2^6 \times C_3^5 = 15 \times 10 = 150$ (種)。

- (2) 男女生至少各有 2 人的情形可分成
選出「3 男 2 女」和「2 男 3 女」兩種：

①「3男2女」的選法有 $C_3^6 \times C_2^5 = 20 \times 10 = 200$ 種。

②「2男3女」的選法有 $C_2^6 \times C_3^5 = 15 \times 10 = 150$ 種。

利用加法原理，得選法共有 $200 + 150 = 350$ (種)。

【類題 4】

從男生 4 人，女生 6 人中選出一個 5 人小組。

(1) 若其中 3 人為男生，則有多少種選法？

(2) 若其中至少有 3 名男生，則有多少種選法？

Ans : (1) 60 , (2) 66

【詳解】

(1) 先從 4 名男生中選出 3 人有 C_3^4 種選法，

再從 6 名女生中選出 2 人有 C_2^6 種選法。

利用乘法原理，得選法共有 $C_3^4 \times C_2^6 = 4 \times 15 = 60$ (種)。

(2) 男生至少有 3 人的情形可分成

選出「3男2女」和「4男1女」兩種：

①「3男2女」的選法有 $C_3^4 \times C_2^6 = 4 \times 15 = 60$ 種。

②「4男1女」的選法有 $C_4^4 \times C_1^6 = 1 \times 6 = 6$ 種。

利用加法原理，得選法共有 $60 + 6 = 66$ (種)。

【例題 5】【配合課本例 4】

已知兩組互相垂直的平行線段，相交如右圖。

(1) 共有多少個矩形？

(2) 包含 P 點的矩形有多少個？

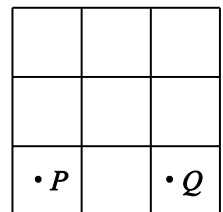
(3) 至少包含 P 或 Q 兩點之一的矩形共有多少個？

Ans : (1) 36 , (2) 9 , (3) 15

【詳解】

(1) 任二水平線和二鉛直線都可圍成一個矩形，

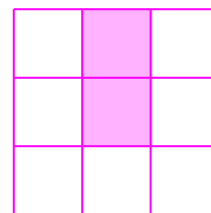
二水平線的取法有 C_2^4 種，



二鉛直線的取法也有 C_2^4 種，

利用乘法原理，得矩形共有

$$C_2^4 \times C_2^4 = 36 \text{ (個)} .$$



(2) 依題意在 P 點的左右上下各取一線，

得矩形共有 $C_1^1 \times C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^1 = 9$ (個) .

(3) 設 A 為所有包含 P 點之矩形組成的集合，

B 為所有包含 Q 點之矩形組成的集合 .

利用取捨原理，得至少包含 P 或 Q 兩點之一

的矩形個數 $n(A \cup B)$ 可計算如下：

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 9 + 9 - C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^3 \times C_1^1$$

$$= 18 - 3 = 15 \text{ (個)} .$$

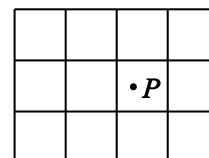
【類題 5】

已知兩組互相垂直的平行線段，相交如右圖 .

(1) 共有多少個矩形？

(2) 不包含 P 點的矩形有多少個？

Ans : (1) 60 , (2) 36



【詳解】

(1) 所求 $= C_2^5 \times C_2^4 = 10 \times 6 = 60$ (個) .

(2) 所求 $=$ (全部矩形的個數) $-$ (包含 P 點矩形的個數)

$$= 60 - C_1^3 \times C_1^2 \times C_1^2 \times C_1^2 = 60 - 24 = 36 \text{ (個)} .$$

【例題 6】 【常考題】

某公寓住戶想從 5 對夫婦中，選出 4 人組成管理委員會，求下列選法各有多少種？

(1) 任意選 .

(2) 選出的 4 人恰有一對夫婦 .

(3) 夫婦不可同時入選。

Ans : (1) 210 , (2) 120 , (3) 80

【詳解】

(1) 從 10 人中選出 4 人，共有 $C_4^{10} = 210$ (種)。

(2) 設 5 對夫婦為 Aa , Bb , Cc , Dd , E 。

先從 5 對中選出 1 對，

再從剩下的 4 種英文字母選出 2 種，

而每種字母又有大寫與小寫 2 種選擇，

故共有 $C_1^5 \times C_2^4 \times 2 \times 2 = 120$ (種)。

(3) 從 5 種英文字母選出 4 種，

而每種字母又有大寫與小寫 2 種選擇，

故共有 $C_4^5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$ (種)。

【類題 6】

從 6 對夫婦中，選出 4 人組成委員會，若規定夫婦不可同時入選，則共有多少種選法？

Ans : 240

【詳解】

夫婦不可同時入選的選法，共有 $C_4^6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 240$ (種)。

【例題 7】【常考題】

從「internet」一字共 8 個字母中，求

(1) 任取 4 個字母為一組，共有多少種組合？

(2) 任取 4 個字母排成一列，共有多少種排列數？

Ans : (1) 26 , (2) 354

【詳解】

「internet」一字共有一個 i，兩個 n，兩個 t，兩個 e，一個 r。

(1) 任取 4 個字母為一組有三種情形：

① 兩同兩同：從 n, t, e 中選兩種字母的方法有 $C_2^3 = 3$ 種。

② 兩同兩異：從 n, t, e 中選一種字母，

再從剩下的四種字母中選兩種，

方法有 $C_1^3 \times C_2^4 = 3 \times 6 = 18$ 種。

③ 四異：從五種字母中選四種，方法有 $C_4^5 = 5$ 種。

根據加法原理得知，任取 4 個字母為一組共有
 $3 + 18 + 5 = 26$ 種組合。

(2) 承(1)，任取 4 個字母排成一列可分為以下三種情形：

① 兩同兩同：選法有 3 種，每種都有 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 種排列方法。

因此，有 $3 \times 6 = 18$ 種排法。

② 兩同兩異：選法有 18 種，每種都有 $\frac{4!}{2!} = 12$ 種排列方法。

因此，有 $18 \times 12 = 216$ 種排法。

③ 四異：選法有 5 種，每種都有 $4! = 24$ 種排列方法。

因此，有 $5 \times 24 = 120$ 種排法。

根據加法原理得知，共有 $18 + 216 + 120 = 354$ 種排法。

【類題 7】

從「mammal」一字共 6 個字母中任取 3 個排成一列，共有多少種排法？

Ans : 19

【詳解】

「mammal」一字共有三個 m，兩個 a，一個 l。

任取 3 個字母排成一列可分為以下三種情形：

(1) 三同：有 $C_1^1 \times 1 = 1$ 種。

(2) 二同一異：有 $C_1^2 C_1^2 \times \frac{3!}{2!1!} = 12$ 種。

(3) 三異：有 $C_3^3 \times 3! = 6$ 種。

根據加法原理得知，共有 $1 + 12 + 6 = 19$ 種排法。

主題二、組合數的性質

兩個組合數的性質：

(1) 剩餘定理：當 $0 \leq k \leq n$ 時， $C_k^n = C_{n-k}^n$ 。

(2) 巴斯卡定理：當 $0 \leq k \leq n-1$ 時， $C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$ 。

【例題 8】【配合課本例 5】

(1) 已知 $C_{2k}^{10} = C_{k+1}^{10}$ ，求 k 的值。

(2) 求 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{19}$ 的值。

Ans : (1) 1 或 3 , (2) 1140

【詳解】

(1) 有下列兩種情形：

① 若 $2k = k+1$ ，則 $k = 1$ 。

② 若 $2k + (k+1) = 10$ ，則 $k = 3$ 。

故 $k = 1$ 或 3 。

(2) 利用 $C_2^2 = C_3^3$ 及巴斯卡公式，得

$$\text{原式} = C_3^3 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{19}$$

$$= C_3^4 + C_2^4 + \cdots + C_2^{19} = C_3^{19} + C_2^{19}$$

$$= C_3^{20} = 1140。$$

【類題 8】

(1) 已知 $C_5^{12} = C_{k+3}^{12}$ ，求 k 的值。

(2) 求 $C_0^2 + C_1^3 + C_2^4 + \cdots + C_8^{10}$ 的值。

Ans : (1) 2 或 4 , (2) 165

【詳解】

(1) 有下列兩種情形：

① 若 $5 = k+3$ ，則 $k = 2$ 。

② 若 $5 + (k+3) = 12$ ，則 $k = 4$ 。

故 $k = 2$ 或 4 。

(2) 利用 $C_0^2 = C_0^3$ 及巴斯卡公式，得

$$\text{原式} = C_0^3 + C_1^3 + C_2^3 + \cdots + C_8^{10}$$

$$= C_1^4 + C_2^4 + \cdots + C_8^{10} = C_7^{10} + C_8^{10}$$

$$= C_8^{11} = 165.$$

【例題 9】【常考題】

設 n, r 為正整數，且 $n-1 > r$ ，若 $C_r^{n-1} : C_r^n : C_r^{n+1} = 6 : 9 : 13$ ，求 n, r 的值。

Ans : $n = 12, r = 4$

【詳解】

因為

$$\begin{aligned} C_r^{n-1} : C_r^n : C_r^{n+1} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} : \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{1}{1} : \frac{n}{n-r} : \frac{n(n+1)}{(n-r)(n-r+1)}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 1 : \frac{n}{n-r} : \frac{n(n+1)}{(n-r)(n-r+1)} = 6 : 9 : 13. \text{ 推得}$$

$$\begin{cases} \frac{n}{n-r} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ \frac{n+1}{n-r+1} = \frac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n = 3n - 3r, \\ 9n + 9 = 13n - 13r + 13. \end{cases}$$

解得 $n = 12, r = 4$ 。

【類題 9】

設 n, r 為正整數，且 $n > r$ ，若 $C_{r-1}^n : C_r^n : C_{r+1}^n = 1 : 2 : 3$ ，求 n, r 的值。

Ans : $n = 14, r = 5$

【詳解】

因為

$$\begin{aligned} C_{r-1}^n : C_r^n : C_{r+1}^n &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} : \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \\ &= \frac{1}{1 \cdot (n-r+1)(n-r)} : \frac{1}{r \cdot (n-r)} : \frac{1}{(r+1)r \cdot 1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{(n-r+1)(n-r)} : \frac{1}{r \cdot (n-r)} : \frac{1}{(r+1)r} = 1 : 2 : 3. \text{ 推得}$$

$$\begin{cases} \frac{n-r+1}{r} = \frac{2}{1} \\ \frac{n-r}{r+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-3r = -1 \\ 2n-5r = 3 \end{cases}$$

解得 $n=14, r=5$.

主題三、重複組合

下列三個問題的組合數都是 H_k^n ，而且 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 。

- (1) 從 n 類事物中選取 k 個的組合（每類的個數均至少 k 個且可以重複選取）。
- (2) n 元一次方程式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非負整數解。
- (3) 將 k 個相同的事物全部分給 n 個人的分法。

【例題 10】【配合課本例 6】

方程式 $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ 有多少組非負整數解？

Ans : 28

【詳解】

非負整數解共有 $H_6^3 = C_6^8 = C_2^8 = 28$ (組)。

【類題 10】

方程式 $x + y + z + u = 7$ 有多少組非負整數解？

Ans : 120

【詳解】

非負整數解共有 $H_7^4 = C_7^{10} = C_3^{10} = 120$ (組)。

【例題 11】【配合課本例 7】

桌球俱樂部擬購買 8 把桌球拍以供忘記攜帶球拍的會員使用，
若球拍分為刀板，直拍與大陸拍 3 類，試問俱樂部有多少種購買方式？

Ans : 45

【詳解】

設桌球俱樂部擬購買刀板，直拍與大陸拍各 x_1, x_2, x_3 把，
根據題意得 $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ 。

其非負整數解有 $H_8^3 = C_8^{3+8-1} = C_8^{10} = C_2^{10} = 45$ 組，

故共有 45 種購買方式。

【類題 11】

菜市場推出菠菜、A 菜、…等 6 種菜任選 3 把 50 元，每種菜都可重複選取，
問：用 50 元買 3 把菜，會有多少種購買組合？

Ans : 56

【詳解】

設 6 種菜各買 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 把，
根據題意得 $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 3$ 。

其非負整數解有 $H_3^6 = C_3^8 = 56$ 組，

故共有 56 種購買組合。

【例題 12】【配合課本例 8】

將 7 枝相同的筆全部分給 4 個小朋友。

(1) 共有幾種分法？

(2) 若要求每人至少分到 1 枝，則有多少種分法？

Ans：(1) 120，(2) 20

【詳解】

(1) 將 7 枝相同的筆全部分給 4 人的分法有

$$H_7^4 = C_7^{10} = C_3^{10} = 120 \text{ (種)} .$$

(2) 先將筆分給每人 1 枝，

於是問題就變成 3 枝相同的筆全部分給 4 人，

$$\text{分法有 } H_3^4 = C_3^6 = 20 \text{ (種)} .$$

【類題 12】

將 9 本相同的書全部分給 3 個小朋友。

(1) 共有幾種分法？

(2) 若要求每人至少分到 2 本，則有多少種分法？

Ans：(1) 55，(2) 10

【詳解】

(1) 將 9 本相同的書全部分給 3 個小朋友的分法有

$$H_9^3 = C_9^{11} = C_2^{11} = 55 \text{ (種)} .$$

(2) 先將書分給每人 2 本，

於是問題就變成 3 本相同的書全部分給 3 人，

$$\text{分法有 } H_3^3 = C_3^5 = 10 \text{ (種)} .$$

【例題 13】【常考題】

已知方程式 $x+y+z+u=12$ ，問

- (1) 非負整數解有多少組？
- (2) 正整數解有多少組？
- (3) 滿足 $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2, u \geq 3$ 的整數解有多少組？
- (4) 滿足 $x > 0, y > 1, z > 2, u > 3$ 的整數解有多少組？

Ans : (1) 455 , (2) 165 , (3) 84 , (4) 10

【詳解】

(1) 非負整數解有 $H_{12}^4 = C_{12}^{15} = 455$ 組。

(2) 令 $x' = x - 1 \geq 0, y' = y - 1 \geq 0, z' = z - 1 \geq 0, u' = u - 1 \geq 0$ ，
原方程式可改寫為

$$(x'+1) + (y'+1) + (z'+1) + (u'+1) = 12,$$

$$\text{即 } x' + y' + z' + u' = 8.$$

又 x', y', z', u' 均為非負整數解，

故 $x' + y' + z' + u' = 8$ 有 $H_8^4 = C_8^{11} = 165$ 組非負整數解，

即 $x + y + z + u = 12$ 有 165 組正整數解。

(3) 因為 $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2, u \geq 3$ ，所以令

$$x' = x \geq 0, y' = y - 1 \geq 0, z' = z - 2 \geq 0, u' = u - 3 \geq 0,$$

原方程式可改寫

$$\text{為 } (x'+0) + (y'+1) + (z'+2) + (u'+3) = 12, \text{ 即 } x' + y' + z' + u' = 6.$$

又 x', y', z', u' 均為非負整數解，故 $x' + y' + z' + u' = 6$ 有

$$H_6^4 = C_6^9 = 84 \text{ 組非負整數解，}$$

即滿足 $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2, u \geq 3$ ， $x + y + z + u = 12$ 有 84 組整數解。

(4) 因為 x, y, z, u 皆為整數，且

$$x > 0, y > 1, z > 2, u > 3 \Rightarrow x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3, u \geq 4,$$

所以令 $x' = x - 1 \geq 0, y' = y - 2 \geq 0, z' = z - 3 \geq 0, u' = u - 4 \geq 0$ ，
原方程式可改寫為

$$(x'+1) + (y'+2) + (z'+3) + (u'+4) = 12,$$

$$\text{即 } x' + y' + z' + u' = 2.$$

又 x', y', z', u' 均為非負整數解，

故 $x' + y' + z' + u' = 2$ 有 $H_2^4 = C_2^5 = 10$ 組非負整數解，

即滿足 $x > 0, y > 1, z > 2, u > 3$ ，

$x + y + z + u = 12$ 有 10 組整數解。

【類題 13】

從全校高一的 5 個班級選出 10 人組成籃球聯隊，規定每班至少有一個人參加。
請問各班名額的分配共有多少種情形？

Ans : 126

【詳解】

此問題相當於問：

方程式 $x + y + z + u + t = 10$ 的正整數解有多少組？

故名額的分配共有 $H_{10-5}^5 = H_5^5 = C_5^9 = C_4^9 = 126$ (種)。

【例題 14】【常考題】

設 $x + y + z + u \leq 10$ ，問

(1) 非負整數解有多少組？

(2) 正整數解有多少組？

Ans : (1) 1001, (2) 210

【詳解】

令 $t = 10 - (x + y + z + u) \geq 0$ 。因此， $x + y + z + u + t = 10$ 。

(1) 因為 x, y, z, u 均為非負整數，

所以 $x + y + z + u + t = 10$ 的非負整數解有

$$H_{10}^5 = C_{10}^{14} = 1001 \text{ 組，}$$

即 $x + y + z + u \leq 10$ 的非負整數解有 1001 組。

(2) 因為 x, y, z, u 均為整數，且 $x, y, z, u > 0, t \geq 0$

$$\Rightarrow x, y, z, u \geq 1, t \geq 0,$$

所以令

$$x' = x - 1 \geq 0, y' = y - 1 \geq 0, z' = z - 1 \geq 0, u' = u - 1 \geq 0, t' = t \geq 0,$$

原方程式可改寫為

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (u' + 1) + t' = 10, \text{ 即}$$

$$x' + y' + z' + u' + t' = 6 .$$

又 x', y', z', u', t' 均為非負整數解，

故 $x' + y' + z' + u' + t' = 6$ 有

$$H_6^5 = C_6^{10} = 210 \text{ 組非負整數解，}$$

即 $x + y + z + u \leq 10$ 的正整數解有 210 組。

【類題 14】

不等式 $x + y + z \leq 7$ 的

(1) 非負整數解有多少組？

(2) 正整數解有多少組？

Ans : (1) 120 , (2) 35

【詳解】

仿例題的解法，得

(1) 非負整數解有 $H_7^4 = C_7^{10} = C_3^{10} = 120$ 組。

(2) 正整數解有 $H_{7-3}^4 = H_4^4 = C_4^7 = C_3^7 = 35$ 組。

【例題 15】【配合課本例 9】

將 4 本相同的書及 5 枝相同的筆全部分給甲乙兩人，
則下列分法各有多少種？

(1) 每人至少得一枝筆。

(2) 每人至少得一物（書或筆皆可）。

Ans : (1) 20 , (2) 28

【詳解】

(1) 因為每人至少得一枝筆，

所以先各發一枝筆給甲乙兩人。

剩下的三枝相同的筆全部分給甲乙兩人，

分法有 $H_3^2 = C_3^4 = 4$ 種。

再將 4 本相同的書全部分給甲乙兩人，

分法有 $H_4^2 = C_4^5 = 5$ 種。

因此，每人至少得一枝筆的分法有 $4 \times 5 = 20$ 種。

(2) 將 4 本相同的書及 5 枝相同的筆全部分給甲、乙兩人，

分法有 $H_4^2 \times H_5^2 = C_4^5 \times C_5^6 = 5 \times 6 = 30$ 種。

其中，甲全沒拿到及乙全沒拿到的分法不符合題意，
分法共有 2 種。

因此，每人至少得一物的分法有 $30 - 2 = 28$ 種。

【類題 15】

某公司設有四個部門，每個部門均有經理一人，另有總經理一人管理這四個部門。年終時董事會發放同面額的禮券 10 張給總經理及四部門的經理，若總經理至少得 3 張，四個經理每人至少得 1 張，則共有多少種發放的方法？

Ans : 35

【詳解】

因為總經理至少得 3 張，四個經理每人至少得 1 張，
所以先發 3 張給總經理，各發 1 張給四個經理，
剩餘的 3 張再全部分給 5 人，

分法有 $H_3^5 = C_3^7 = 35$ 種。

主題四、分堆的方法數

$$\text{分堆的方法數} = \frac{\text{分給人的方法數}}{\text{等堆數階乘}} .$$

【例題 16】【配合課本例 10】

將 6 本不同的書，求下列各分法的方法數：

- (1) 平分成三堆。
- (2) 依 2 本，2 本，1 本，1 本分成四堆。
- (3) 依 4 本，1 本，1 本分成三堆。
- (4) 甲得 4 本，乙得 1 本，丙得 1 本。

Ans： (1) 15，(2) 45，(3) 15，(4) 30

【詳解】

- (1) 將 6 本不同的書，平分成三堆的分法有

$$\frac{C_2^6 C_2^4 C_2^2}{3!} = 15 \text{ 種} .$$

- (2) 將 6 本不同的書，

依 2 本，2 本，1 本，1 本分成四堆的分法有

$$\frac{C_2^6 C_2^4 C_1^2 C_1^1}{2!2!} = 45 \text{ 種} .$$

- (3) 將 6 本不同的書，依 4 本，1 本，1 本

分成三堆的分法有 $\frac{C_4^6 C_1^2 C_1^1}{2!} = 15 \text{ 種} .$

- (4) 將 6 本不同的書，先依 4 本，1 本，1 本分成三堆，

分法有 $\frac{C_4^6 C_1^2 C_1^1}{2!} = 15 \text{ 種} .$

再將這三堆書分給甲，乙，丙三人，

有 $1 \times 2 \times 1 = 2$ 種分配方法。

故有 $15 \times 2 = 30$ 種分法。

【類題 16】

將 8 位新生平均分發到甲、乙、丙、丁四班，共有多少種分法？

Ans： 2520

【詳解】

先將 8 位新生分成 2 人，2 人，2 人，2 人四堆，

再任意分發到四個班級。

故共有 $\frac{C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2}{4!} \times 4! = 2520$ (種)。

【例題 17】【常考題】

籃球 3 人鬥牛賽，共有 9 人參加，組成三隊，求其中甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種。

Ans : 210

【詳解】

將 9 人平分成三隊的分法有 $\frac{C_3^9 C_3^6 C_3^3}{3!} = 280$ 種。

其中，甲乙兩人同一隊的組隊方法不符合題意，

有 $\frac{C_1^7 C_3^6 C_3^3}{2!} = 70$ 種。

因此，甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有
 $280 - 70 = 210$ 種。

【類題 17-1】

公司從 8 名員工中選派 4 人到台北市、台中市及台南市三地出差，其中台北市須去 2 人，另外兩地各去 1 人，求共有多少種派遣方案？

Ans : 840

【詳解】

先從 8 人中選出 4 人，

再將此 4 人分成 2 人，1 人，1 人三堆，

最後再安排到三個城市。

故共有 $C_4^8 \times \frac{C_2^4 \times C_1^2 \times C_1^1}{2!} \times 2! = 840$ (種)。

【類題 17-2】

學校以「每班轉入的學生不超過 4 位」的原則，將 8 位轉組的學生編入 A, B, C, D 四班，則下列方案編班名單各有多少種？

(1) 平均編入 A, B, C, D 四班。

(2) 將甲乙丙 3 人編入 A 班，而其餘 5 人編入 B, C, D 三班。

Ans : (1) 2520, (2) 240

【詳解】

(1) 因為每班都編入 $\frac{8}{4} = 2$ 人，

所以編班名單共有 $\frac{C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2}{4!} \times 4! = 2520$ (種)。

- (2) 因為其餘 5 人每人各有 3 種選擇，
所以應有 $3^5 = 243$ 種選擇，
但當 5 人都選同一班時，
違反「每班轉入的學生不超過 4 位」的原則，
須扣除．故編班名單共有 $243 - 3 = 240$ （種）．

lt99ok223 重要精選考題

基礎題

1-1 已知 $P_r^n = 272$, $C_r^n = 136$, 求 n , r 的值。

Ans : $n=17, r=2$

【詳解】

$$P_r^n = 272, C_r^n = 136$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}} = r! = \frac{272}{136} = 2$$

$$\Rightarrow r = 2,$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2!} = 136$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 272 = 17 \times 16$$

$$\Rightarrow n = 17.$$

1-2 設 $C_{2m}^{18} = C_{m+3}^{18}$, 求正整數 m 的值。

Ans : $m=3$ 或 5

【詳解】

$$C_{2m}^{18} = C_{m+3}^{18}$$

$$\Rightarrow 2m = m+3 \text{ 或 } 2m + (m+3) = 18$$

$$\Rightarrow m = 3 \text{ 或 } m = 5.$$

2. 水族箱中有大小不同的金魚 3 隻，孔雀魚 4 隻，大肚魚 5 隻，若從中撈 2 隻不同種類的魚送給小花，則共有多少種選擇的方案（同種類的魚視為不同）？

Ans : 47 種

【詳解】

金魚，孔雀魚各 1 隻，或金魚，大肚魚各 1 隻，

或孔雀魚，大肚魚各 1 隻，

共有 $3 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 5 = 12 + 15 + 20 = 47$ 種。

3. 從 5 個老師及 9 個學生中，選出 3 人擔任委員，求下列選法各有多少種？

(1) 任意選。

(2) 老師與學生各至少一人被選中。

(3) 至少有兩個老師被選中。

Ans : (1) 364 種，(2) 270 種，(3) 100 種

【詳解】

$$(1) \quad C_3^{14} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = 364。$$

(2) 2 位老師，1 位學生或 1 位老師，2 位學生，共有

$$C_2^5 \times C_1^9 + C_1^5 C_2^9 = 10 \times 9 + 5 \times 36 = 270。$$

(3) 2 位老師，1 位學生或 3 位老師，共有

$$C_2^5 \times C_1^9 + C_3^5 = 10 \times 9 + 10 = 100。$$

4. 某拳擊比賽，規定每位選手必須和所有其他選手各比賽一場，賽程總計為 78 場，則選手人數有多少人？

Ans : 13 人

【詳解】

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = 78$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 156 = 13 \times 12$$

$$\Rightarrow n = 13。$$

5. 阿公瘋樂透（樂透每張彩券有 6 個號碼），他以「包牌方式」在 1 到 9 號中任取 6 個號碼就買一張彩券，彩券每張 50 元。結果該期頭獎號碼為：

7, 8, 9, 10, 11, 1 號。依得獎規定：若每張彩券恰有三個號碼與頭獎號碼相同，則可得 200 元，不到三個號碼相同，則沒得獎金。請問：阿公賠了多少元？

Ans : 200 元

【詳解】

$$C_6^9 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84，即共買 84 組，$$

花了 $84 \times 50 = 4200$ 元。

$$C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20，即共中了 20 組，$$

得獎金 $20 \times 200 = 4000$ 元，
賠了 $4200 - 4000 = 200$ 元。

6. 因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日選擇兩天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方式？ 【91 指乙】

Ans：15 種

【詳解】

$$C_2^7 - 6 = 15 .$$

└┐ 二天相鄰
└┐ 任選二天

7. 甲乙兩人在排成一列的 10 個空位中，選不相鄰的兩個座位坐下，共有多少種不同的方法？

Ans：72 種

【詳解】

$$P_2^{10} - 9 \times 2 = 90 - 18 = 72 .$$

└┐ 二位相鄰
└┐ 任排二位

8. 右圖是由 4 個大小相等的正方形所拼成，問圖中的 9 個點共可決定

(1) 多少條直線？

(2) 多少個三角形？

Ans：(1) 20 條，(2) 76 個

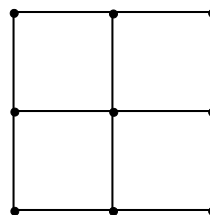
【詳解】

(1) 任兩點可連成一直線，扣除三點共線者，得

$$C_2^9 - 8 \times C_2^3 + 8 = 36 - 24 + 8 = 20 \text{ 條直線。}$$

(2) 任三點可連成一個三角形，扣除三點共線者，得

$$C_3^9 - 8 \times C_3^3 = 84 - 8 = 76 \text{ 個三角形。}$$



9. 從「dependence」一字共 10 個字母中，
 (1) 任取 4 個字母為一組，共有多少種組合？
 (2) 任取 4 個字母排成一行，共有多少種排列數？

Ans：(1) 31 種，(2) 371 種

【詳解】

共有 2 個 d，4 個 e，2 個 n，1 個 p，1 個 c。

- (1) 4 個相同者有 1 種，

3 同 1 異者有 4 種，

2 同 2 同者有 3 種，

2 同 2 異者有 $3 \times C_2^4 = 3 \times 6 = 18$ 種，

4 個相異者有 $C_4^5 = 5$ 種，

故共有 $1 + 4 + 3 + 18 + 5 = 31$ 種取法。

- (2) 4 個相同者有 1 種，

3 同 1 異者有 $4 \times 4 = 16$ 種，

2 同 2 同者有 $3 \times \frac{4!}{2!2!} = 3 \times 6 = 18$ 種，

2 同 2 異者有 $3 \times C_2^4 \times \frac{4!}{2!} = 3 \times 6 \times 12 = 216$ 種，

4 個相異者有 $C_4^5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$ 種，

故共有 $1 + 16 + 18 + 216 + 120 = 371$ 種排法。

10. 設 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{98} + C_2^{99} = C_r^n$ ，且 $r < 10$ ，求正整數 n ， r 的值。

Ans： $n=100$, $r=3$

【詳解】

$$C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{98} + C_2^{99}$$

$$= C_3^3 + C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + \cdots + C_2^{98} + C_2^{99}$$

$$= C_3^4 + C_2^4 + C_2^5 + \cdots + C_2^{98} + C_2^{99}$$

$$= C_3^5 + C_2^5 + \cdots + C_2^{98} + C_2^{99}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= C_3^{99} + C_2^{99}$$

$$= C_3^{100},$$

故 $n=100$ ， $r=3$ 。

11. 某家冷飲店供應 4 種飲料，小華要外帶 6 杯飲料，問共有多少種點法？

Ans：84 種

【詳解】

設四種飲料各買 x_1, x_2, x_3, x_4 杯，則

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6,$$

非負整數解有 $H_6^4 = C_6^9 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ 種點法。

12. 將 3 枝相同的原子筆及 4 枝相同的鉛筆全部分給甲、乙、丙三人，則下列分法各有多少種？

(1) 任意分。

(2) 每人至少得一枝原子筆及一枝鉛筆。

Ans：(1) 150 種，(2) 3 種

【詳解】

(1) $H_3^3 \times H_4^3 = C_3^5 \times C_4^6 = 10 \times 15 = 150$ 種分法。

(2) 先發給每人 1 支原子筆及 1 支鉛筆，

剩下 1 支鉛筆任意分配有 $H_1^3 = C_1^3 = 3$ 種分法。

13. 公司從 8 名職員中選出 5 人派往甲、乙、丙三地出差，其中甲地須派 1 人，另外兩地各派 2 人，求共有多少種選派方案。

Ans：1680 種

【詳解】

$$C_1^8 \times C_2^7 \times C_2^5 = \frac{8!}{1!2!2!3!} = 1680 \text{ 種選派方案。}$$

進階題 ►►►

14. 有一列火車從第一車到第十車共十節車廂，
若要指定其中三節車廂為自由坐，則

(1) 共有多少種指定方案？

(2) 若再要求此三節自由坐車廂兩兩不相銜接，則共有多少種指定方案？

Ans : (1) 120 種，(2) 56 種

【詳解】

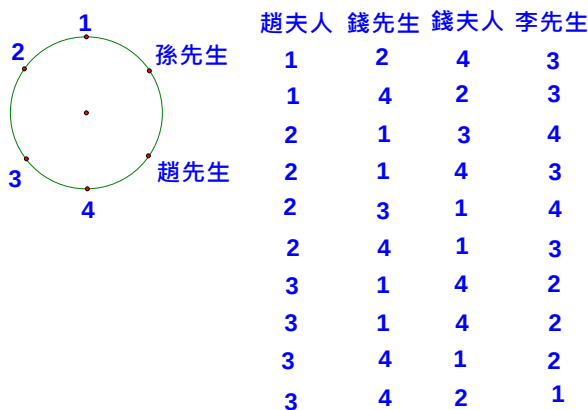
$$(1) C_3^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120。$$

$$(2) C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56。$$

15. 趙氏與錢氏兩對夫婦、以及孫先生、李先生圍坐一個六人座圓桌吃飯，其中趙先生和孫先生已在兩個相鄰的位子坐定。若限定夫妻不得相鄰，則其他四人就座的方法共有多少種？ 【97 指乙】

Ans : 10 種

【詳解】



16. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種不同的組隊方法？ 【93 指乙】

Ans : 161 種

【詳解】

$$\text{所求} = C_2^4 C_6^7 + C_3^4 C_5^7 + C_4^4 C_4^7 = 161。$$

17. 全校獨唱比賽有 3 位高一，4 位高二，2 位高三共 9 位同學報名參賽。
- (1) 若出場順序只考慮年級，而先不考慮人名，而且要求 3 位高一同學不可連續出賽，如：一二三一二三一二二，則共有多少種年級的排列順序？
- (2) 若同年級上台次序要連續並考慮人名，且最後由 2 位高三學長壓軸演出，則共有多少種出賽的安排？

Ans：(1) 525 種，(2) 576 種

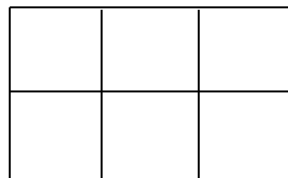
【詳解】

- (1) 二二二二三先作排列，再於其間格安插三個“一”，

$$\frac{6!}{4!2!} \times C_3^7 = 525 \text{ 種。}$$

- (2) $2 \times 4! \times 3! \times 2! = 576 \text{ 種。}$

18. 有一個兩列三行的表格如右圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有_____種。 【99 學測】



Ans：432 種

【詳解】

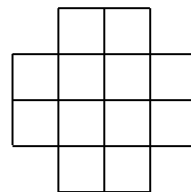
1、2 這兩個數字在同一列的有 $2 \times 3 \times 2 \times 4! = 288$ ，

1、2 這兩個數字在同一行的有 $3 \times 2 \times 4! = 144$ ，

1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 $288 + 144 = 432 \text{ 種。}$

19. 右圖中，每一小格都是邊長為 1 的正方形，試問：圖中的線段可構成多少個矩形及正方形？

Ans：51 個矩形，17 個正方形



【詳解】

- (1) 矩形有 $C_2^3 \times C_2^5 + C_2^5 \times C_2^3 - C_2^3 \times C_2^3$
 $= 30 + 30 - 9 = 51 \text{ 個。}$

- (2) 1×1 有 12 個， 2×2 有 5 個，
 共有正方形 $12 + 5 = 17 \text{ 個。}$

20. 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生，導師規定在本週 5 個上課日中，每天兩名值日生，且至少須有 1 名男生。試問本週安排值日生的方式共有多少種？

Ans：43200 種

【詳解】

恰有 2 名男生在一組，有 $C_2^6 = 15$ 種，
 剩下 4 名男生與 4 名女生配對有 $4! = 24$ 種，
 再將 5 組排週一到週五的順序，故共有
 $15 \times 24 \times 5! = 43200$ 種排法。

21. 問：四位正整數中，數字和為 7 的共有多少個？

Ans：84 個

【詳解】

設原數為 $xyzu$ ， x, y, z, u 為非負整數，且 $x \neq 0$ ，

$x + y + z + u = 7$ 之非負整數有 $C_7^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ ，

扣除 $x = 0$ 者，即 $y + z + u = 7$ 之非負整數有 $C_7^9 = 36$ 個，

故共有 $120 - 36 = 84$ 個。

22. 設 $H_0^4 + H_1^4 + H_2^4 + \cdots + H_9^4 = C_9^n$ ，求正整數 n 的值。

Ans：13

【詳解】

$$H_0^4 + H_1^4 + H_2^4 + \cdots + H_9^4$$

$$= H_0^5 + H_1^4 + H_2^4 + \cdots + H_9^4$$

$$= H_1^5 + H_2^4 + \cdots + H_9^4$$

$$= \cdots$$

$$= H_9^5 = C_9^{13}$$

故 $n = 13$ 。

23. 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

(1) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；

(2) 外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；

(3) 另外1位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有_____種先發守備陣容。(當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容) 【99 指乙】

Ans : 192

【詳解】

(二壘手) $2 \times$ (三壘手) $2 \times$ (游擊手) $2 \times$ (外野手) $4 \times 3 \times 2 = 192$ 。