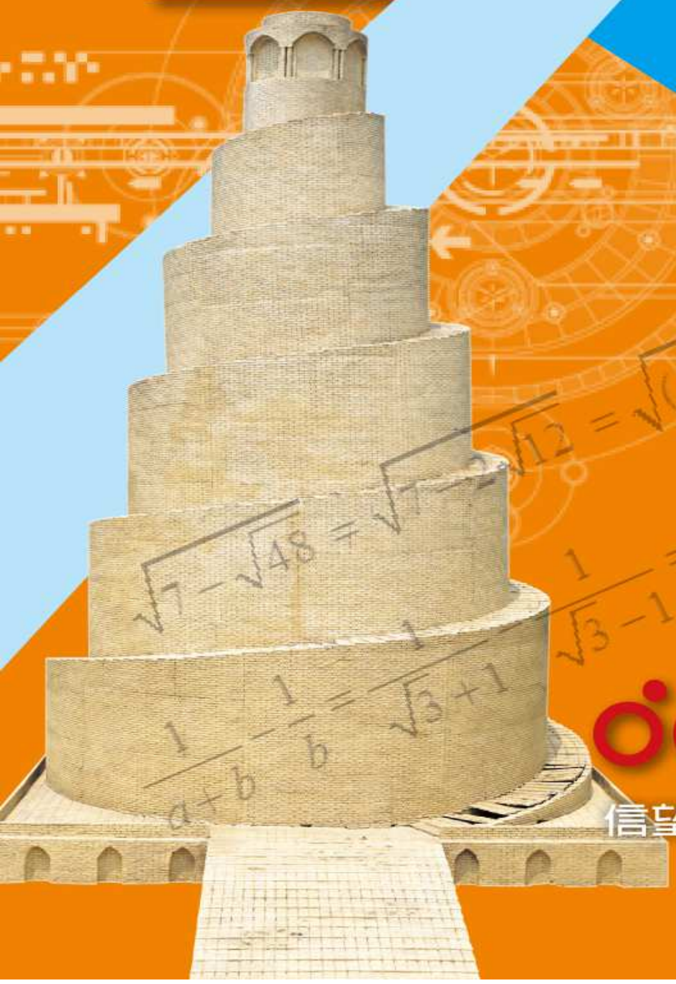
# 高中數學 進階講義

## 指數函數

陳清海 老師



信望愛文教基金會

# ok132 指數函數

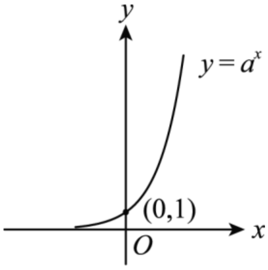
## 一、指數函數

1. 定義：設 $a>0$，$a\neq1$，$x$是任意實數，我們稱

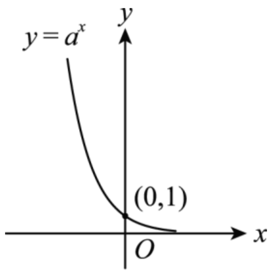
   $y=f(x)=a^x$為以 $a$為底數的指數函數．

2. 圖形與基本性質

   指數函數 $y=a^x$在 $a>1$與 $0<a<1$時的圖形如下：



$a>1$



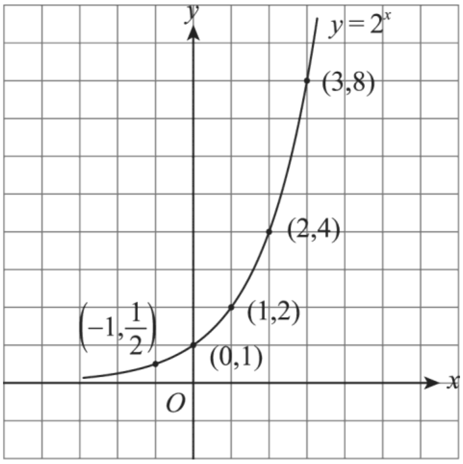
$0<a<1$

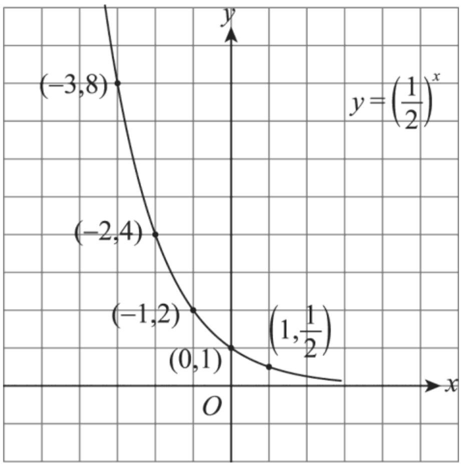
函數圖形通過點$(0,1)$，整個圖形在 $x$軸上方，且 $x$軸為其漸近線．

**【範例 1】**

在下列的方格紙中作出 $y=2^x$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形．

【詳解】

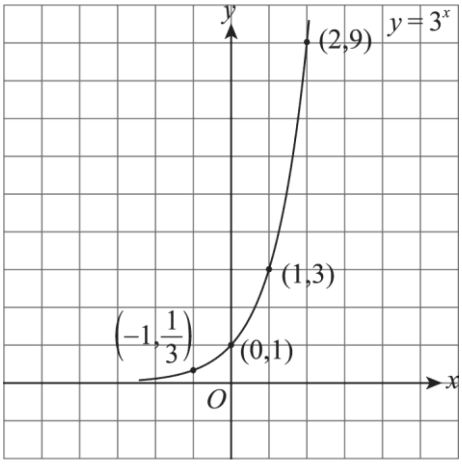


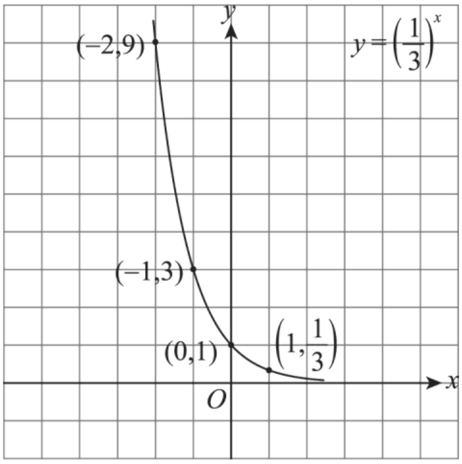




**【演練 1】**

已知 $y=a^x$ 的圖形與 $y=3^x$ 的圖形對稱於 $y$ 軸，試在下列的方格紙中作出 $y=3^x$ 與 $y=a^x$ 的圖形．

【詳解】



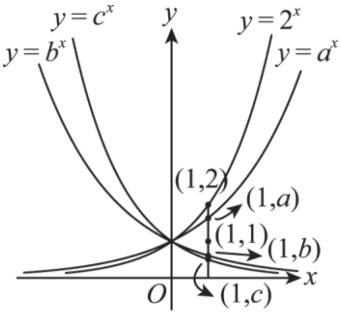




由圖可知：$a=\frac{1}{3}$，其函數圖形如右圖．

**【範例 2】**

下圖為函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 與 $y=2^x$ 的圖形，且 $y=c^x$ 與 $y=2^x$ 的圖形對稱於 $y$ 軸，選出正確的選項：

**(1)** $a>2$，**(2)** $1<a<2$，**(3)** $0<a<1$，**(4)** $b=\dfrac{1}{2}$，**(5)** $b>c$ .




Ans：(2)(5)

【詳解】

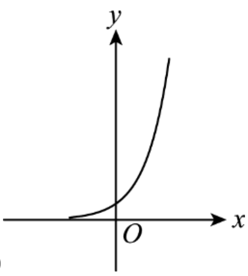
由上圖可知：$c<b<1<a<2$，

又因為 $y=c^x$ 與 $y=2^x$ 的圖形對稱於 y 軸，所以 $c=\dfrac{1}{2}$ .

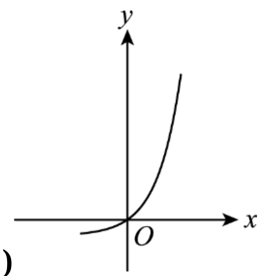
故正確的選項為(2)(5) .

**【演練 2】**

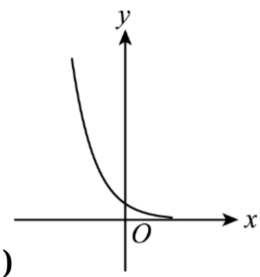
設 $a>0$，$a\neq1$，則下列圖形中，哪些可能是指數函數 $y=a^x$ 的部分圖形？



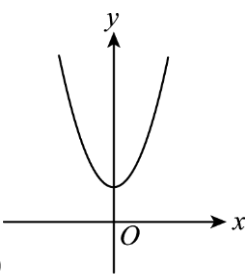

**(1)**




**(2)**




**(3)**




**(4)**

Ans：(1)(3)

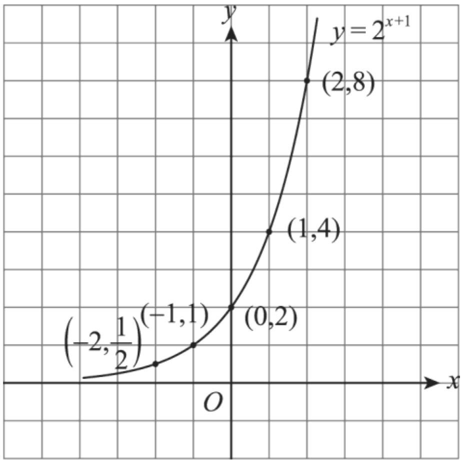
【詳解】

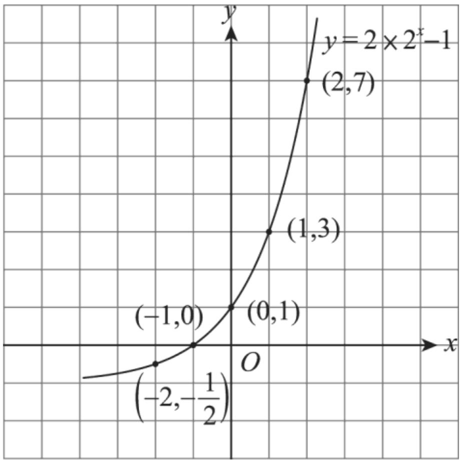
正確的選項為(1)(3)．

**【範例 3】**

在下列的方格紙中作出 $y=2^{x+1}$ 與 $y=2\times2^{x}-1$ 的圖形．

【詳解】



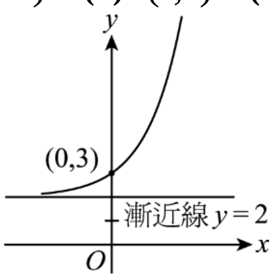

函數 $y=2^{x+1}$ 的圖形為函數 $y=2^{x}$ 的圖形向左平移一個單位．

函數 $y=2\times2^{x}-1$ 的圖形為函數 $y=2^{x+1}$ 的圖形向下平移一個單位．

**【演練 3】**

若 $y=2^{x+a}+b$ 的圖形如右圖所示，則 $(a,b)$ 可能為

**(1)** $(0,2)$，**(2)** $(1,1)$，**(3)** $(2,-1)$，**(4)** $(0,3)$，**(5)** $(3,-5)$．




Ans：(1)

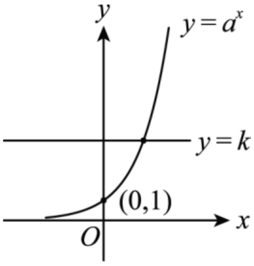
【詳解】

因為漸近線為 $y=2$，所以 $b=2$，即 $y=2^{x+a}+2$，

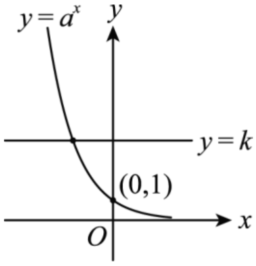
又當 $x=0$ 時，$y=3$，因此 $2^{a}+2=3$，得 $a=0$．

故 $(a,b)=(0,2)$，正確的選項為(1)．

## 二、指數方程式



$a>1$



$0<a<1$

因為指數函數 $y=a^x$ 的圖形與 $x$ 軸上方的任意水平線都恰有一個交點，所以當 $a^{\alpha}=a^{\beta}$ 時，可得 $\alpha=\beta$ .

**【範例 4】**

解下列方程式：

**(1)** $3^{3x}=3^{x+2}$，

**(2)** $2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-2}+1=0$，

**(3)** $6^{x}-2^{x}-4\cdot 3^{x}+4=0$ .

Ans：(1) 1，(2) −3 或 2，(3) 2 或 0

【詳解】

(1) 因為當 $a^{\alpha}=a^{\beta}$時，可得 $\alpha=\beta$，
所以 $3x=x+2$，解得 $x=1$ .

(2) 將方程式 $2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-2}+1=0$改寫成 $2\cdot\left(2^{x}\right)^{2}-\frac{33}{4}\cdot 2^{x}+1=0$，

即 $8\cdot\left(2^{x}\right)^{2}-33\cdot 2^{x}+4=0$ .

令 $t=2^{x}(t>0)$，則原方程式為 $8\cdot t^{2}-33t+4=0$，

因式分解得 $(8t-1)(t-4)=0$，因此 $t=\frac{1}{8}$或 4，

即 $2^{x}=2^{-3}$或 $2^{2}$，解得 $x=-3$或 2 .

(3) 因為 $6^{x}-2^{x}-4\cdot 3^{x}+4=2^{x}\cdot 3^{x}-2^{x}-4\cdot 3^{x}+4=\left(2^{x}-4\right)\left(3^{x}-1\right)=0$，

所以 $2^{x}=4=2^{2}$ 或 $3^{x}=1=3^{0}$，即 $x=2$或 $x=0$ .

**【演練 4】**

解下列方程式：

**(1)** $\left(\sqrt{8}\right)^{x+1}=16\sqrt{2}$，

**(2)** $4^{x}-3\cdot 2^{x}+2=0$，

**(3)** $9^{-x}-2\cdot 3^{1-x}-27=0$ .

Ans：(1) 2，(2) 1 或 0，(3) −2

【詳解】

(1) 因為 $\left(\sqrt{8}\right)^{x+1}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{x+1}=2^{\frac{3x+3}{2}}$，又 $16\sqrt{2}=2^{\frac{9}{2}}$，

所以 $\frac{3x+3}{2}=\frac{9}{2}$，解得 $x=2$ .

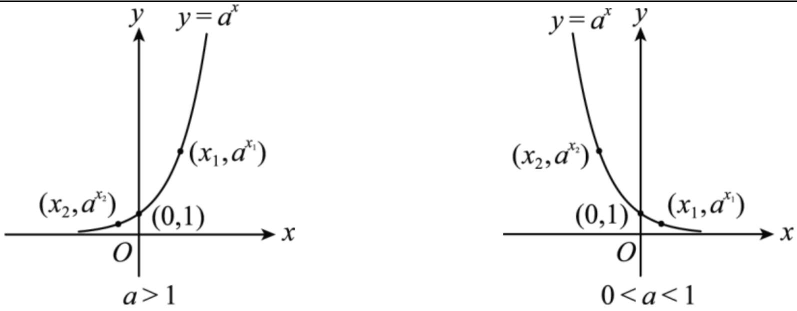
(2)　因為 $4^x-3\cdot2^x+2=\left(2^x-2\right)\left(2^x-1\right)=0$，

所以 $2^x=2^1$ 或 $2^x=1=2^0$，即 $x=1$ 或 $x=0$．

(3)　將方程式 $9^{-x}-2\cdot3^{1-x}-27=0$ 改寫成 $\left(3^{-x}\right)^2-6\cdot3^{-x}-27=0$．

令 $t=3^{-x}$ ( $t>0$ )，則原方程式為 $t^2-6t-27=0$，
因式分解得 $(t-9)(t+3)=0$，因此 $t=9$ 或 $-3$（不合），
即 $3^{-x}=9=3^2$，解得 $x=-2$．

# 三、指數不等式




觀察指數函數圖形，可得

(1) 當 $a>1$時，圖形由左向右爬升，即「若 $x_1>x_2$，則 $a^{x_1}>a^{x_2}$ 」.

(2) 當 $0<a<1$時，圖形由左向右下降，即「若 $x_1>x_2$，則 $a^{x_1}<a^{x_2}$ 」.

**【範例 5】**

已知 $a=\sqrt[3]{4},\ b=\sqrt[4]{8},\ c=\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$，比較 $a, b, c$ 三數的大小．

Ans：a＝c＜b

【詳解】

利用指數律將 $a, b, c$ 改寫為 $a=2^{\frac{2}{3}},\ b=2^{\frac{3}{4}},\ c=2^{\frac{4}{6}}$．

因為底數 $2>1$ 且 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}<\frac{3}{4}$，所以 $2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{6}}<2^{\frac{3}{4}}$，即 $a=c<b$．

| | 底數 | 指數 | |
|---|---|---|---|
| a | 2 | 2/3 | 1.59 |
| b | 2 | 3/4 | 1.68 |
| c | 2 | 2/3 | 1.59 |

**【演練 5】**

已知 $a=\frac{1}{\sqrt[4]{8}},\ b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ c=2^{-\frac{1}{4}}$，比較 $a, b, c$ 三數的大小．

Ans：a＜b＜c

【詳解】

利用指數律將 $a, b, c$ 改寫為 $a=2^{-\frac{3}{4}},\ b=2^{-\frac{1}{2}},\ c=2^{-\frac{1}{4}}$．

因為底數 $2>1$ 且 $-\frac{1}{4}>-\frac{1}{2}>-\frac{3}{4}$，所以 $2^{-\frac{3}{4}}<2^{-\frac{1}{2}}<2^{-\frac{1}{4}}$，即 $a<b<c$．

**【範例 6】**

解下列不等式：

**(1)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}<\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\right)^{2}$，

**(2)** $4^x-3\cdot 2^x+2<0$．

Ans：(1) x＞2 或 x＜0，(2) 0＜x＜1

【詳解】

(1) 因為不等式為 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}<\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$，又底數 $\frac{1}{5}<1$，所以得 $x^2>2x$，

即 $x(x-2)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<0$ .

(2) 令 $t=2^x$，因為 $4^x=2^{2x}=t^2$，所以方程式可化為 $t^2-3t+2<0$，

因式分解得 $(t-2)(t-1)<0$，解得 $1<t<2$ .

因為 $t=2^x$，即 $2^0<2^x<2^1$，又底數 $2>1$，所以得 $0<x<1$ .

**【演練 6】**

**解下列不等式：**

**(1)** $\frac{1}{4}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}<2$，

**(2)** $2^{x+1}+2^{2-x}-6<0$ .

Ans：(1) $-\frac{1}{2}<x<1$，(2) $0<x<1$

【詳解】

(1) 因為不等式為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$，

又底數 $\frac{1}{2}<1$，所以 $2>2x>-1$，

解得 $-\frac{1}{2}<x<1$ .

(2) 令 $t=2^x(t>0)$，方程式為 $2t+\frac{4}{t}-6<0$，

可化為 $2t^2-6t+4<0$，

因式分解得 $2(t-1)(t-2)<0$，解得 $1<t<2$ .

因為 $t=2^x$，即 $2^0<2^x<2^1$，底數 $2>1$，所以得 $0<x<1$ .

**【範例 7】**

**已知 $f(x)=4\cdot 3^x-9^x$，且 $-1\le x\le 2$，求 $f(x)$ 的最大值與最小值 .**

Ans：M＝4，m＝−45

【詳解】

令 $t=3^x(t>0)$ .

因為 $-1\le x\le 2$ 且底數 $3>1$，所以 $3^{-1}\le 3^x\le 3^2$，即 $\frac{1}{3}\le t\le 9$ .

又 $f(x)$可改寫為 $4t-t^2=-(t-2)^2+4$，其中 $\frac{1}{3}\le t\le 9$ .

因此，當 $t=2$時有最大值 4，當 $t=9$時有最小值$-45$ .

【演練 7】

已知 $f(x)=4^x-6\times 2^x$，且 $0\le x\le 2$，求 $f(x)$的最大值與最小值 .

Ans：M＝$-5$，m＝$-9$

【詳解】

令 $t=2^x(t>0)$ .

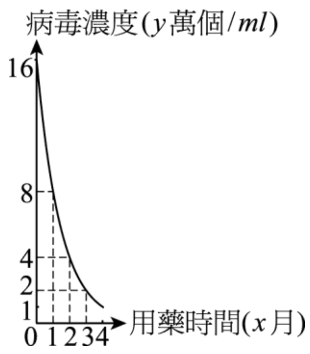
因為 $0\le x\le 2$且底數 $2>1$，所以 $2^0\le 2^x\le 2^2$，即 $1\le t\le 4$ .

又 $f(x)$可改寫為 $t^2-6t=(t-3)^2-9$，其中 $1\le t\le 4$ .

因此，當 $t=1$時有最大值$-5$，當 $t=3$時有最小值$-9$ .

**【範例 8】**

右圖為某種病毒在血液中的濃度（ $y$萬個/$ml$ ）與用藥時間（ $x$月 ）的關係圖 . 設其關係為指數函數 $y=k\cdot a^x$，$k$是常數 .




**(1)** 求此函數 .

**(2)** 此病毒的濃度由每 $ml$有 **8** 萬個減至 $\frac{1}{2}$萬個所需要的時間是多少個月?

**(3)** 若病毒的濃度小於每 $ml$有 **100** 個時，我們稱此疾病被治癒，則從用藥到治癒需多少個月?

Ans：(1) $y=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$，(2) 4，(3) 11

【詳解】

(1) 當 $x=0$時， $y=16$，且 $y=k\cdot a^0=k$，因此 $k=16$，

又當 $x=1$時， $y=8$，且 $y=16a^1=8$，因此 $a=\frac{1}{2}$，

故此函數為 $y=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

(2) 由圖可知：當 $x=1$時， $y=8$，又因為函數 $y=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$，

所以當 $y=\frac{1}{2}$時， $\frac{1}{2}=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$，解得 $x=5$ .

因此病毒的濃度由每 $ml$ 有 8 萬個減至 $\frac{1}{2}$ 萬個

所需要的時間為 $5-1=4$ 個月．

(3) 當病毒的濃度小於每 $ml$ 有 100 個，

即病毒的濃度小於每 $ml$ 有 $\frac{1}{100}$ 萬個時治癒，因此 $y<\frac{1}{100}$．

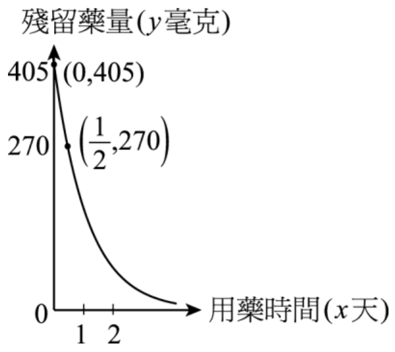
設從用藥到治癒需 $n$ 個月，則 $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{100}$，即 $100<2^{n-4}$，

因為 $2^7=128>100>64=2^6$，所以 $n-4=7$，$n=11$，

即 11 個月後，此病將會治癒．

**【演練 8】**

**右圖為某種農藥在農作物上的單位面積之殘留藥量（ $y$ 毫克）與用藥時間（ $x$ 天）的關係圖．設其關係為指數函數 $y=k\cdot a^x$， $k$ 是常數．**




**(1) 求此函數．**

**(2) 用藥 1.5 天後，單位面積之殘留藥量為多少毫克?**

**(3) 若單位面積之殘留藥量小於 50 毫克方可食用，則用藥後幾天才可以食用呢?**

Ans：(1) $y=405\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x$，(2) 120，(3) 3

【詳解】

(1) 當 $x=0$ 時， $y=405$，且 $y=k\cdot a^0=k$，因此 $k=405$，

又當 $x=\frac{1}{2}$ 時， $y=270$，即 $y=405a^{\frac{1}{2}}=270$，

因此 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，解得 $a=\frac{4}{9}$，故此函數為 $y=405\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x$．

(2) 用藥 1.5 天後，單位面積之殘留藥量為

$405\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{1.5}=405\cdot\frac{8}{27}=120$（毫克）．

(3) 設從用藥到可以食用需 $n$ 天，則 $405\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n<50$，即 $\frac{405}{50}<\left(\frac{9}{4}\right)^n$，

因為 $\frac{405}{50}$ 大約等於 8，又 $\frac{9}{4}=2.25$，

所以 $n$ 的最小值為 3，即用藥 3 天後，才可以食用．

**【範例 9】**

求方程式 $2^x+x-1=0$ 有多少實根?

Ans：1

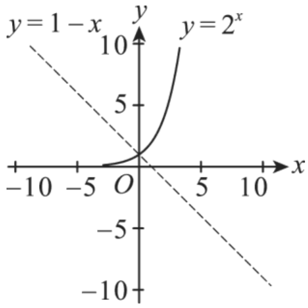
【詳解】

方程式 $2^x+x-1=0$ 的實根個數

等於 $y=2^x$ 與 $y=1-x$ 兩圖形的交點個數．

如圖，兩圖形有 1 個交點，

故方程式 $2^x+x-1=0$ 有 1 實根．




**【演練 9】**

求方程式 $2^{|x|}-2\cdot x^2=0$ 有多少實根?

Ans：4

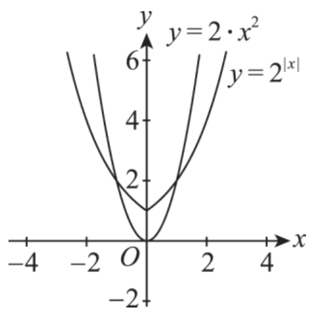
【詳解】

方程式 $2^{|x|}-2\cdot x^2=0$ 的實根個數

等於 $y=2^{|x|}$ 與 $y=2\cdot x^2$ 兩圖形的交點個數．

如圖，兩圖形有 2 個交點，

故方程式 $2^{|x|}-2\cdot x^2=0$ 有 2 實根．




| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2^x | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| 2x^2 | 98 | 72 | 50 | 32 | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | 72 | 98 |

# ok132ex

## 一、基礎題

**1.** 關於函數 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，選出正確的選項：

**(1)** $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形和 $f(x)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形對稱於 $y$ 軸．

**(2)** $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形和 $f(x)=2^{-x}$ 的圖形對稱於 $y$ 軸．

**(3)** $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形和 $f(x)=2^x$ 的圖形對稱於 $y$ 軸．

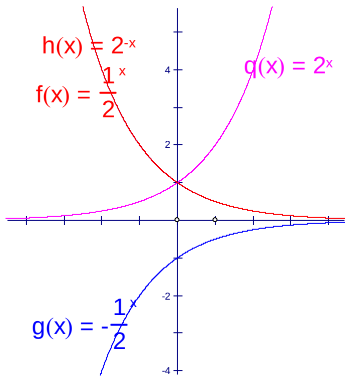
**(4)** $f(1000)>f(999)$．

**(5)** 當 $x<9$ 時，$f(x)>\dfrac{1}{1000}$．

Ans：(3)(5)

【詳解】

如右圖，




(1) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形和 $f(x)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形對稱於 x 軸．

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形和 $f(x)=2^{-x}$ 的圖形對稱於相同．

(3) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形和 $f(x)=2^x$ 的圖形對稱於 $y$ 軸．

(4) $f(1000)<f(999)$，f 為減函數。

(5) $f(9)=(\dfrac{1}{2})^9=\dfrac{1}{512}>\dfrac{1}{1000}$。

**2.** 解下列各方程式：

**(1)** $\left(\dfrac{1}{7}\right)^x=7\sqrt{7}$。

**(2)** $2^{2x}-9\cdot 2^{x-1}+2=0$．

Ans：(1) $x=-\frac{3}{2}$，(2) $x=-1$或 2

【詳解】

(1) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=7\sqrt{7} \Rightarrow 7^{-x}=7^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$。

(2) $2^{2x}-9\cdot 2^{x-1}+2=0$

$\Rightarrow (2^x)^2-\frac{9}{2}(2^x)+2=0$

$\Rightarrow 2\cdot(2^x)^2-9\cdot(2^x)+4=0$

$\Rightarrow (2^x-4)(2\cdot 2^x-1)=0$

$\Rightarrow 2^x=4$ 或 $2^x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=2$ 或 $x=-1$。

**3.** 比較下列各組數的大小關係：

**(1)** $a=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$，$b=2^{0.4}$，$c=\sqrt[4]{8}$，$d=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ .

**(2)** $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2.5}$，$b=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$，$c=(1.5)^{\sqrt{2}}$，$d=(0.99)^{99}$ .

Ans：(1) $c>a>b>d$，(2) $a>b>c>d$

【詳解】

(1) $a=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=(2\times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}$,

$b=2^{0.4}=2^{\frac{2}{5}}$ ,

$c=\sqrt[4]{8}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$,

$d=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2}{(2^2)^{\frac{1}{3}}}=2\times 2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$ ,

$\frac{3}{4}>\frac{1}{2}>\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$，故

$c>a>b>d$。

(2) $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2.5}=(\frac{3}{2})^{2.5}$， $b=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$，

$c=(1.5)^{\sqrt{2}}=(\frac{3}{2})^{\sqrt{2}}$， $d=(0.99)^{99}<1$，

故 a＞b＞c＞d。

**4.　解下列不等式：**

**(1)** $7^{x^2}>1$。　　**(2)** $\frac{1}{81}<\left(\frac{1}{9}\right)^{4x}\leq 3$。

**(3)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}\leq\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+3}$。　　**(4)** $9^x+3^x-2\geq 0$ .

Ans：(1) $x\neq 0$，(2) $-\frac{1}{8}\leq x<\frac{1}{2}$，(3) $x\leq -1$或 $x\geq 6$，(4) $x\geq 0$

【詳解】

(1) $7^{x^2}>1=7^0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow x\neq 0$。

(2) $\frac{1}{81}<\left(\frac{1}{9}\right)^{4x}\leq 3$

$\Rightarrow 3^{-4}<3^{-8x}\leqq 3$

$\Rightarrow -4<-8x\leqq 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{8}\leqq x<\frac{1}{2}$。

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}\leq\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+3}=(\frac{1}{3})^{4x+6}$

$\Rightarrow x^2-x\geqq 4x+6$

$\Rightarrow x^2-5x-6\geqq 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+1)\geqq 0$

$\Rightarrow x\geqq 6$ 或 $x\leqq -1$。

(4) $9^x+3^x-2\geq 0$

$\Rightarrow (3^x)^2+(3^x)-2\geqq 0$

$\Rightarrow (3^x+2)(3^x-1)\geqq 0$

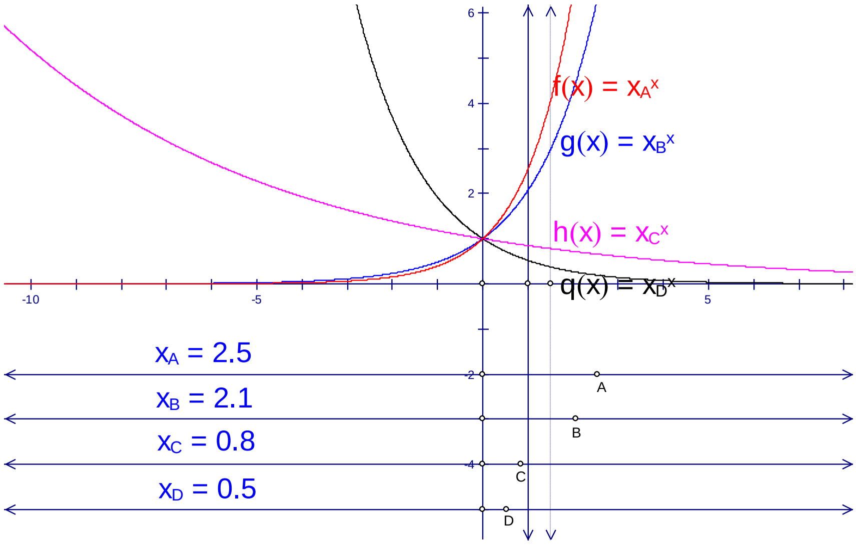
$\Rightarrow 3^x\geqq 1 \Rightarrow x\geqq 1$。

【備註】$3^x>0$ 恆成立。

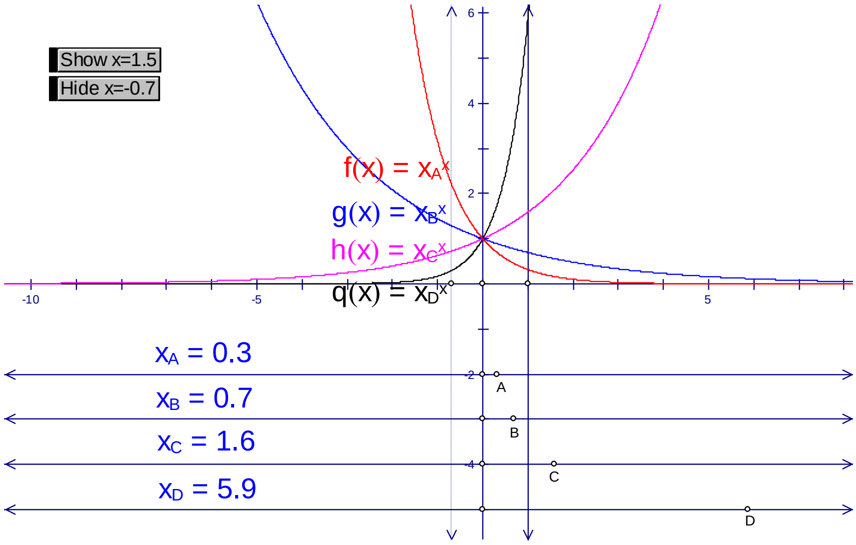
**5.** **(1)** 已知 $a^{1.5}>b^{1.5}>1>c^{1.5}>d^{1.5}$，求 $a$，$b$，$c$，$d$ 的大小關係．
**(2)** 已知 $a^{-0.7}>b^{-0.7}>1>c^{-0.7}>d^{-0.7}$，求 $a$，$b$，$c$，$d$ 的大小關係．
Ans：(1) $a>b>c>d$，(2) $d>c>b>a$

【詳解】

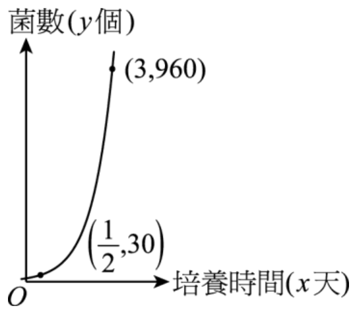
(1) $a^{1.5}>b^{1.5}>1^{1.5}>c^{1.5}>d^{1.5}$，故 $a>b>1>c>d$。




(2) $a^{-0.7}>b^{-0.7}>1^{-0.7}>c^{-0.7}>d^{-0.7}$，故 $a<b<1<c<d$。



**6.** 右圖為某種酵母菌之單位容量的菌數（y 個）與培養時間（x 天）的關係圖．設其關係為指數函數 $y=k\cdot a^x$，$k$是常數．




**(1)** 求此函數．

**(2)** 培養 1.5 天後，單位容量內有多少個酵母菌?

**(3)** 若酵母飲料之酵母菌的單位容量菌數大於 3000 個，飲用後將有助於消化系統，則需培養多少天後，才適合飲用?

Ans：(1) $y=15\cdot 4^x$，(2) 120（個），(3) 4 天

【詳解】

(1) 由右圖知，

$k\cdot a^{\frac{1}{2}}=30$，$k\cdot a^3=960$，

相除得 $a^{\frac{5}{2}}=32=2^5=4^{\frac{5}{2}}\Rightarrow a=4$。

代入得 $k\cdot 4^{\frac{1}{2}}=30\Rightarrow k=15$，

故 $f(x)=15\cdot 4^x$。

(2) $f(1.5)=15\cdot 4^{\frac{3}{2}}=15\cdot 8=120$。

(3) $f(x)=15\cdot 4^x>3000\Rightarrow 4^x>200\Rightarrow x\geqq 4$。

## 二、進階題

**7.** 觀察相關的函數圖形，選出正確的選項：

**(1)** $10^x=x$有實數解．

**(2)** $10^x=x^2$有實數解．

**(3)** 當 $x$為實數時，$10^x>x$恆成立．

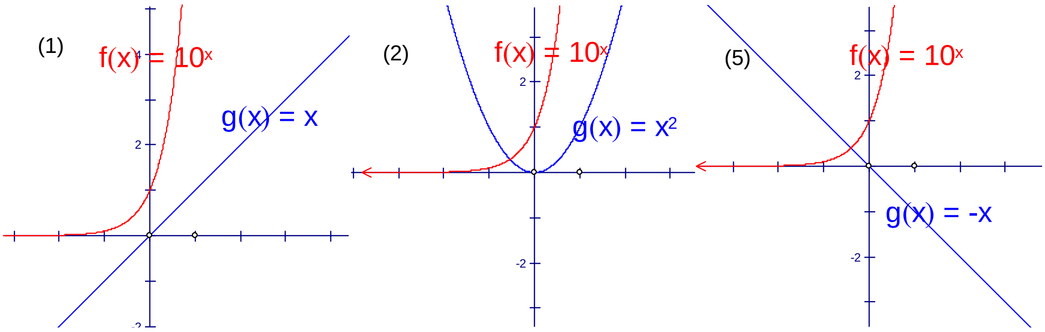
**(4)** 當 $x>0$時，$10^x>x^2$恆成立．

**(5)** $10^x=-x$有實數解．　【91 學測】

Ans：(2)(3)(4)(5)

【詳解】

方程式有實數解，則兩圖形有交點。




(3) 由圖(1)知，當 $x$ 為實數時，$10^x > x$ 恆成立。

(4) 由圖(2)知，當 $x>0$ 時，$10^x > x^2$ 恆成立。

**8.** 已知 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，且 $f(a)=\dfrac{9}{7}$，求實數 $a$ 的值．

Ans：$\dfrac{3}{2}$

【詳解】

$$f(a)=\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=\frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=\frac{9}{7}$$

$\Rightarrow 7\cdot(2^{2a}+1)=9\cdot(2^{2a}-1)$

$\Rightarrow 2\cdot 2^{2a}=16=2\cdot 2^3$

$\Rightarrow 2a=3$

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$ 。.

**9.** 求函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 兩圖形的交點坐標．

Ans：$(-2，\dfrac{1}{16})$

【詳解】

$y=4^x=2^{3x+2} \Rightarrow 2x=3x+2 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=4^{-2}=\dfrac{1}{16}$，

即交點為$(-2，\dfrac{1}{16})$。

**10.** **解不等式：**

**(1)** $(0.1)^{x^2-3x-6}>100$ .　　　**(2)** $4^{x+\frac{1}{2}}+31\cdot 2^{x-2}-1<0$ .

Ans：(1) $-1<x<4$，(2) $x<-3$

【詳解】

(1) $(0.1)^{x^2-3x-6}>100=10^2=(0.1)^{-2}$，

$\Rightarrow x^2-3x-6<-2 \Rightarrow x^2-3x-4<0$

$\Rightarrow (x-4)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<4$。

(2) $4^{x+\frac{1}{2}}+31\cdot 2^{x-2}-1<0$

$\Rightarrow 4^{\frac{1}{2}}\times 4^x+31\cdot 2^{-2}\cdot 2^x-1<0$

$\Rightarrow 2\cdot(2^x)^2+\dfrac{31}{4}\cdot 2^x-1<0$

$\Rightarrow 8\cdot(2^x)^2+31\cdot 2^x-4<0$

$\Rightarrow (8\cdot 2^x-1)(2^x+4)<0$

$\Rightarrow -4<2^x<\dfrac{1}{8}=2^{-3}$

$\Rightarrow x<-3$。

**11.** **設** $\alpha$，$\beta$ **為方程式** $4^x-3\cdot 2^{x+2}+16=0$ **的二根，求** $\alpha+\beta$ **的值** .

Ans：4

【詳解】

$2^\alpha$，$2^\beta$ 為方程式 $y^2-12y+16=0$ 的兩根，

由二次方程式根與係數的關係知

$2^\alpha+2^\beta=12$，$2^\alpha\times 2^\beta=16$，

$\Rightarrow 2^{\alpha+\beta}=16=2^4$

$\Rightarrow \alpha+\beta=4$。

**12.** 設 $x$ 為實數，且 $f\left(x\right)=2\left(4^{x}+4^{-x}\right)+4\left(2^{x}+2^{-x}\right)+8$ ．

**(1)** 令 $t=2^{x}+2^{-x}$，證明 $t\geq 2$ ．

**(2)** 用 $t$ 表示 $f\left(x\right)$ ．

**(3)** 求 $f\left(x\right)$ 的最小值，及此時 $x$ 的值 ．

Ans：(2) $2t^{2}+4t+4$，(3) 當 $x=0$ 時， $f\left(x\right)$ 有最小值 20

【詳解】

(1) $t=2^{x}+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^{x}\times 2^{-x}}=2$。

(2) $4^{x}+4^{-x}=(2^{x})^{2}+(2^{-x})^{2}=(2^{x}+2^{-x})^{2}-2$，

$\Rightarrow g(t)=2(t^{2}-2)+4t+8=2t^{2}+4t+4$。

(3) $g(t)=2(t+1)^{2}+2$，

當 $t=2$ 時，$g(2)=2\cdot(2+1)^{2}+2=20$，

此時，$2^{x}=2^{-x}=1$，即 $x=0$。