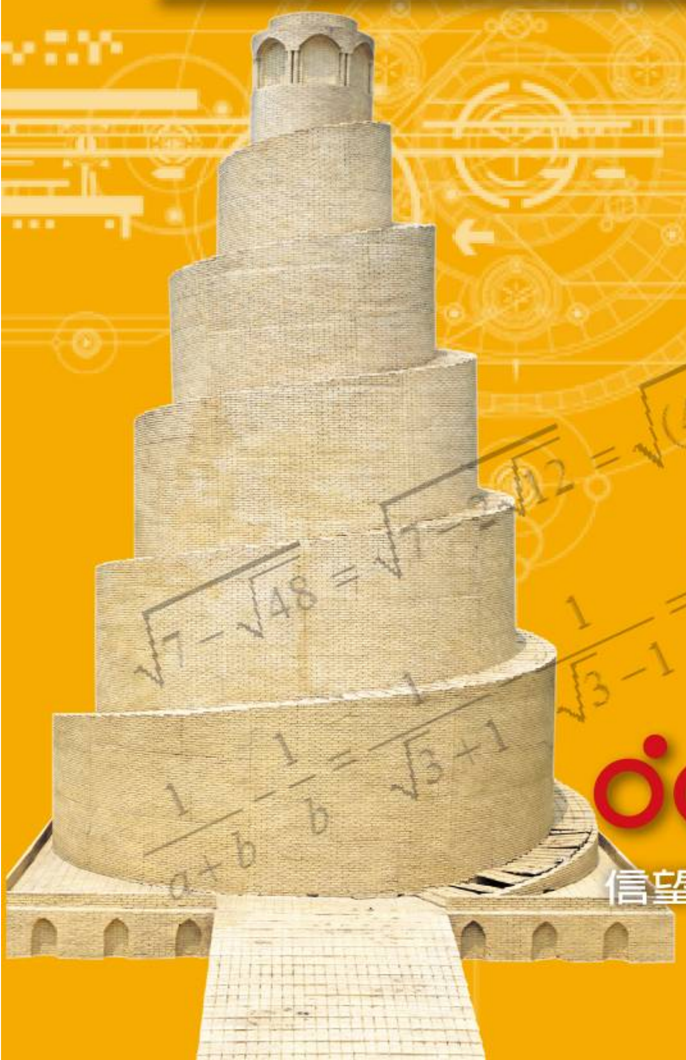
數學 基礎講義

面積與二階行列式

信望愛文教基金會・數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

面積與二階行列式

二階行列式

定義

二階行列式：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

性質

1.將同一行（列）的數值同乘以某一常數 k，所得之新的行列式值為原行列式值之 k 倍。

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2.將行列式的某一行（列）的倍數加到另一行（列）上，其行列式值不變。

$$\begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

3.將行列式的兩行（列）互換，將使行列式質變號。

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

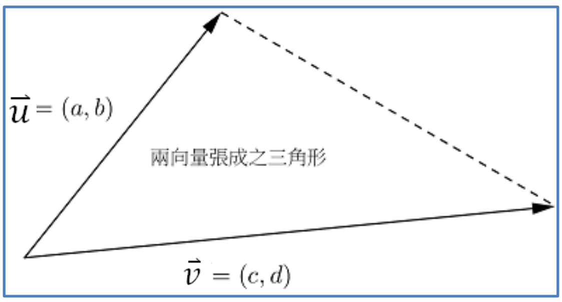
4.行列式中若有兩行（列）成比例時，行列式值為零。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$$

三角形的面積公式

由 $\vec{u}=(a,b)$，$\vec{v}=(c,d)$ 兩個非零向量所張成之三角形面積為：

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2} = \frac{1}{2}|ad-bc| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|$$



克拉瑪公式──二元一次聯立方程式

二元一次聯立方程式：$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$

令Δ= $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$，$\Delta_x$= $\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$，$\Delta_y$= $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$，

透過加減消去法可得$\Delta \cdot x=\Delta_x$，$\Delta \cdot y=\Delta_y$

關於Δ，Δx，Δy的值以及其所代表之幾何意義分別討論如下：

(1)當$\Delta \neq 0$時，聯立方程式洽有一解，$(x,y)=(\frac{\Delta x}{\Delta},\frac{\Delta y}{\Delta})$，其表現在平面上的意義為兩條相交直線。

(2)當$\Delta=\Delta x=\Delta y=0$時，聯立方程式有無限多組解，利用其中一條方程式改寫為參數式即可表為聯立方程式的解，其表現在平面上的意義是兩條重合直線。

(3)當$\Delta=0$，但Δx，Δy至少一個不為0時，聯立方程式無解，其表現在平面上的意義為兩條平行直線。

小試身手

例題1	已知平面上三點 $A(-3,1)$，$B(2,5)$，$C(4,-6)$則 ΔABC 之面積為何
例題2	平面上以$\vec{A}=(a,b)$，$\vec{B}=(c,d)$為相鄰兩邊的平行四邊形面積為 10， 則以 $3\vec{A}+2\vec{B}$與 $2\vec{A}-3\vec{B}$為相鄰兩邊的平行四邊形面積為?
例題3	試以克拉瑪公式解以下二元一次聯立方程式$\begin{cases} 4x+7y=29 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$
例題4	設$a \in R$，且聯立方程式$\begin{cases} (2-a)x+y=0 \\ 7x-(4+a)y=0 \end{cases}$，除了$(x,y)=(0,0)$以外， 還有其他組解，試求$a=$
例題5	若$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$之解為$x=2$，$y=5$，則$\begin{cases} 4bx-5ay=6c \\ 4ex-5dy=6f \end{cases}$之解為

解答與解析

例題1：$\overline{AB}$=(5,4)，$\overline{AC}$=(7,-7)，則ΔABC之面積為$\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}$的絕對值 $=\frac{63}{2}$

例題2：由題意可知$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的絕對值為10

又$3\vec{A}+2\vec{B}=3(a,b)+2(c,d)=(3a+2c,3b+2d)$

$2\vec{A}-3\vec{B}=2(a,b)-3(c,d)=(2a-3c,2b-3d)$

$\therefore 3\vec{A}+2\vec{B}$與$2\vec{A}-3\vec{B}$為相鄰兩邊的平行四邊形面積為$\left\| \begin{matrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a-3c & 2b-3d \end{matrix} \right\|$

$$=\left| \begin{vmatrix} 3a+2c & 3b \\ 2a-3c & -3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a+2c & 2d \\ 2a-3c & 2b \end{vmatrix} \right|$$

$$=\left| \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -3c & -3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2c & 3b \\ 2a & -3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2d \\ -3c & 2b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ 2a & 2b \end{vmatrix} \right|$$

$$=\left| -9\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 6cd - 6ab + 6ab + 6cd - 4\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = \left| -13\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|$$

$$=13\times 10=130$$

例題3：$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-43$，$\Delta x=\begin{vmatrix} 29 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-86$，$\Delta y=\begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=-129$

$\Rightarrow x=\dfrac{-86}{-43}=2$，$y=\dfrac{-129}{-43}=3$

例題4：聯立方程式的解只有洽一解，無解，以及無限多解三種，依照題意敘述表示除了(0,0)外尚有其他解，亦即至少兩解，故原方程式有無限多解：

$\therefore \boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix} 2-a & 1 \\ 7 & -(4+a) \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow a^2+2a-15=0 \quad \Rightarrow a=-5$或$a=3$

例題 5：令 $\boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$，$\Delta x=\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$，$\Delta y=\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

$\Rightarrow x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=2$，$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=5$

令 $\Delta'=\begin{vmatrix} 4b & -5a \\ 4e & -5d \end{vmatrix}=-20\begin{vmatrix} b & a \\ e & d \end{vmatrix}=20\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=20\Delta$

$\Delta x'=\begin{vmatrix} 6c & -5a \\ 6f & -5d \end{vmatrix}=-30\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}=30\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}=30\Delta y$

$\Delta y'=\begin{vmatrix} 4b & 6c \\ 4e & 6f \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}=-24\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}=-24\Delta x$

$\Rightarrow x'=\dfrac{30}{20}\times 5=\dfrac{15}{2}$，$y'=\dfrac{-24}{20}\times 2=\dfrac{-12}{5}$

故新的聯立方程式解為$(\frac{15}{2},\frac{-12}{5})$