高中數學 進階講義

銳角三角函數

陳清海　老師

信望愛文教基金會

ok311 直角三角形的邊角關係

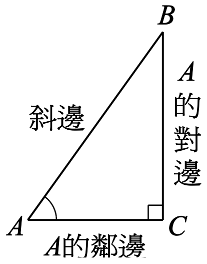
主題一、銳角三角函數

1. 銳角三角函數的定義：

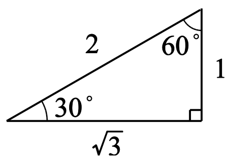
$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$的正弦．

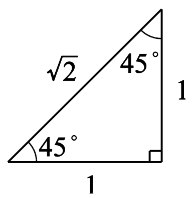
$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$的餘弦．

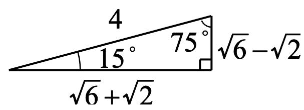
$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，稱作 $\angle A$的正切．



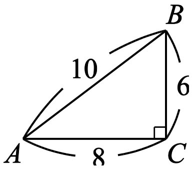
2. 特別角的直角三角形之三邊比例：







【例題 1】



在直角△ ABC中，已知 $\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=6$，求 $\sin A$，$\cos A$和 $\tan A$的值．

Ans： $\sin A=\frac{3}{5}$， $\cos A=\frac{4}{5}$， $\tan A=\frac{3}{4}$

【詳解】

根據三角函數的定義，得

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

$\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

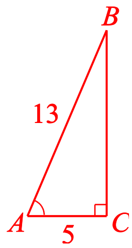
$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$．

【類題 1-1】

設△ ABC為直角三角形，其中 $\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=13$，$\overline{AC}=5$，求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$的值．

Ans： $\sin A=\frac{12}{13}$， $\cos A=\frac{5}{13}$， $\tan A=\frac{12}{5}$

【詳解】



依題意作直角△ ABC，如圖所示，

由畢氏定理得 $\overline{BC}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

故 $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{12}{13}$，

$\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{5}{13}$，

$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{12}{5}$．

【例題 2】

求 $\sin 30^\circ$， $\cos 45^\circ$， $\tan 60^\circ$的值．

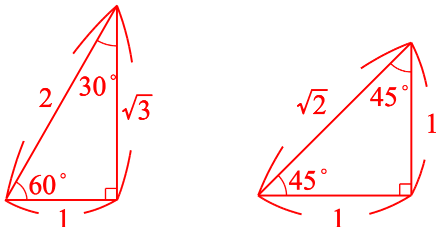
Ans： $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$， $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

【詳解】

$30^\circ-60^\circ-90^\circ$的三角形邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$，

$45^\circ-45^\circ-90^\circ$的三角形邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$，

作圖如下：



得 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$， $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ．

【類題 2-1】

試完成下表：

三角函數 / θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

【詳解】

三角函數 / θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

【類題 2-2】

試求下列各式的值：

(1) $\sin^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ+\tan 60^\circ\cos 30^\circ$.

(2) $(1+\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(1+\cos 60^\circ-\cos 45^\circ)$.

Ans：(1) 2，(2) $\dfrac{7}{4}$

【詳解】

(1) 原式 $=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}=2$.

(2) 原式

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\ .$$

【例題 3】

已知 $\angle A$ 為銳角且 $\sin A=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos A$ 和 $\tan A$ 的值 .

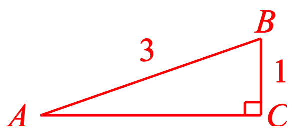
Ans： $\cos A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， $\tan A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

作一直角△ABC，使∠C 為直角，

∠A 的對邊 $\overline{BC}=1$，斜邊 $\overline{AB}=3$，

如圖所示，則



$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

得 $\cos A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， $\tan A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

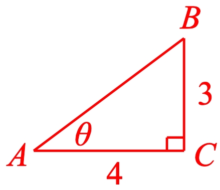
【類題 3-1】

已知 θ 為銳角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值 .

Ans： $\frac{7}{5}$

【詳解】

作一直角△ABC 使∠C 為直角，
∠A 的對邊 $\overline{BC}=3$，
∠A 的鄰邊 $\overline{AC}=4$，如右圖，因此



$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

由銳角三角函數的定義得知，

$\sin\theta=\frac{3}{5}$， $\cos\theta=\frac{4}{5}$，

故 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

【例題 4】

已知△ABC中，$\angle C=90°$，$\overline{AB}=10$，試分別求下列情形下，
$\overline{BC}$及$\overline{AC}$的長．

(1) $\angle B=\frac{1}{2}\angle A$.

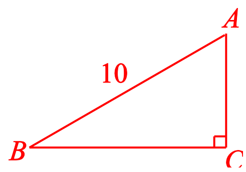
(2) $\tan A=\frac{3}{4}$.

(3) $\sin A=\frac{1}{2}$.

Ans：(1) $\overline{BC}=5\sqrt{3}$， $\overline{AC}=5$，(2) $\overline{BC}=6$， $\overline{AC}=8$，(3) $\overline{BC}=5$， $\overline{AC}=5\sqrt{3}$

【詳解】

(1) 因為∠A＋∠B＝90°，且∠B＝$\frac{1}{2}$∠A，



所以∠B＝30°，∠A＝60°．
$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\sqrt{3}:1:2=5\sqrt{3}:5:10$，
故 $\overline{BC}=5\sqrt{3}$， $\overline{AC}=5$.

(2) 因為 $\tan A=\frac{3}{4}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，

所以 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=3:4:5=6:8:10$，

故 $\overline{BC}=6$， $\overline{AC}=8$ ．

(3) 因為 $\sin A=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，

所以 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2=5:5\sqrt{3}:10$，

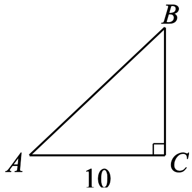
故 $\overline{BC}=5$， $\overline{AC}=5\sqrt{3}$ ．

【類題 4-1】

在△ABC中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=10$，

試在下列條件下求 $\overline{BC}$，$\overline{AB}$的長．

(1) $\angle A=30°$ ． **(2)** $\sin A=\dfrac{3}{5}$ ． **(3)** $\cos A=\dfrac{2}{5}$ ．



Ans：(1) $\overline{BC}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$， $\overline{AB}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$，(2) $\overline{BC}=\dfrac{15}{2}$， $\overline{AB}=\dfrac{25}{2}$，

(3) $\overline{BC}=5\sqrt{21}$， $\overline{AB}=25$

【詳解】

(1) 因為∠A＝30°，所以 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$，

即 $\dfrac{\overline{BC}}{1}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{AB}}{2}$ ．

故 $\overline{BC}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$， $\overline{AB}=\dfrac{20}{\sqrt{3}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ ．

(2) $\sin A=\dfrac{3}{5}$，所以 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=3:4:5$，

即 $\dfrac{\overline{BC}}{3}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{\overline{AB}}{5}$

則 $\overline{BC}=\dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2}$， $\overline{AB}=\dfrac{50}{4}=\dfrac{25}{2}$ ．

(3) $\cos A=\dfrac{2}{5}$，所以 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\sqrt{21}:2:5$，

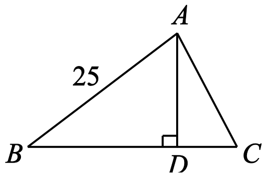
即 $\dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{21}}=\dfrac{10}{2}=\dfrac{\overline{AB}}{5}$

故 $\overline{BC}=5\sqrt{21}$， $\overline{AB}=25$ ．

【例題 5】

如圖，在△ ABC中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AB}=25$，

$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\sin C=\dfrac{15}{17}$，求 $\overline{BC}$的長．



Ans：28

【詳解】

因為 $\sin B=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$，所以 $\overline{AD}=15$，因此

$\overline{BD}=\sqrt{25^2-15^2}=20$．

又因為 $\sin C=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{15}{17}$，所以 $\overline{AC}=17$，因此

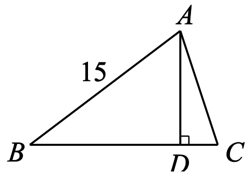
$\overline{CD}=\sqrt{17^2-15^2}=8$．

故 $\overline{BC}=20+8=28$．

【類題 5】

如圖，△ ABC中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AB}=15$，

$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\tan C=3$，求 $\overline{BC}$．



Ans：15

【詳解】

$\sin B=\dfrac{\overline{AD}}{15}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\overline{AD}=9$，

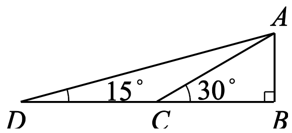
因此 $\overline{BD}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

$\tan C=\dfrac{9}{\overline{CD}}=3\Rightarrow\overline{CD}=3$，

故 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=12+3=15$．

【例題 6】

試利用下圖求出 $\sin 15^\circ$ 的值．



Ans：$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

$\triangle ABC$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的三角形，

令 $\overline{AB}=1$，則 $\overline{BC}=\sqrt{3}$， $\overline{AC}=2$．

因為 $\angle ACB$ 為 $\triangle ACD$ 的外角，所以

$\angle DAC=\angle ACB-\angle ADC=30^\circ-15^\circ=15^\circ$，

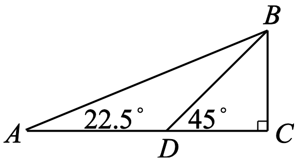
即 $\overline{CD}=\overline{AC}=2$．

$$\overline{AD}=\sqrt{1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

故 $\sin 15^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ．

【類題 6-1】

試利用下圖求出 $\tan 22.5^\circ$ 的值．



Ans：$\sqrt{2}-1$

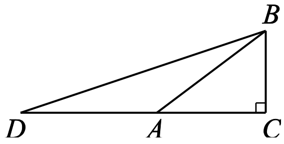
【詳解】

設 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{CD}=1$， $\overline{BD}=\sqrt{2}$ ．

因為 $\angle ABD=45^\circ-22.5^\circ=22.5^\circ$，所以 $\overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{2}$，

故 $\tan 22.5^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ ．

【類題 6-2】



如右圖，$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\sin\angle BAC=\dfrac{3}{5}$，

$\overline{AD}=\overline{AB}$，求 $\tan\angle BDC$的值．

Ans：$\dfrac{1}{3}$

【詳解】

$\triangle ABC$中，因為 $\sin\angle BAC=\dfrac{3}{5}$，

所以可假設 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，因此 $\overline{AC}=4$．

由題意知，$\overline{AD}=\overline{AB}=5$，

故 $\tan\angle BDC=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$．

主題二、三角函數的基本關係

1. 商數關係式：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

2. 平方關係式：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

3. 餘角關係：$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$.

【例題 7】

求下列各式的值：

(1) $\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ$.

(2) $\tan 65^\circ \sin 25^\circ-\sin 65^\circ$.

Ans：(1) 1，(2) 0

【詳解】

(1) 由餘角關係式知 $\sin 55^\circ=\cos\left(90^\circ-55^\circ\right)=\cos 35^\circ$,

故 $\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ=\sin^2 35^\circ+\cos^2 35^\circ=1$.

(2) 因為 $\sin 25^\circ=\cos\left(90^\circ-25^\circ\right)=\cos 65^\circ$,

所以 $\tan 65^\circ \sin 25^\circ-\sin 65^\circ=\dfrac{\sin 65^\circ}{\cos 65^\circ}\cdot\cos 65^\circ-\sin 65^\circ$

$=\sin 65^\circ-\sin 65^\circ=0$.

【類題 7】

求值：$\dfrac{1}{\tan^2 50^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 40^\circ}$.

Ans：-1

【詳解】

$$\frac{1}{\tan^2 50^\circ}-\frac{1}{\cos^2 40^\circ}=\frac{\cos^2 50^\circ}{\sin^2 50^\circ}-\frac{1}{\sin^2 50^\circ}=\frac{-\sin^2 50^\circ}{\sin^2 50^\circ}=-1 .$$

【例題 8】

$\left(\sin 37^\circ+\sin 53^\circ\right)^2+\left(\cos 37^\circ-\cos 53^\circ\right)^2$.

Ans：2

【詳解】

利用餘角關係式，先化成同一個角

$\sin 53^\circ=\cos 37^\circ$ ， $\cos 53^\circ=\sin 37^\circ$

$\left(\sin 37^\circ+\sin 53^\circ\right)^2+\left(\cos 37^\circ-\cos 53^\circ\right)^2$

$=(\sin37^\circ+\cos37^\circ)^2+(\cos37^\circ-\sin37^\circ)^2$

$=\sin^2 37^\circ+2\sin37^\circ\cos37^\circ+\cos^2 37^\circ+\cos^2 37^\circ-2\cos37^\circ\sin37^\circ+\sin^2 37^\circ$

$=2$．

【類題 8】

試求

$\sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 70^\circ+\sin^2 80^\circ$

的值．

Ans：4

【詳解】

原式

$=\sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 10^\circ$

$=(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ)+(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)+(\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ)+(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ)$

$=4$．

【例題 9】

設 θ 為銳角，化簡下列各式：

(1) $\left(1-\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)$．

(2) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$．

Ans：(1) 1，(2) $\dfrac{2}{\sin\theta}$

【詳解】

(1) $\left(1-\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)=\left(\dfrac{\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta}\right)\left(\dfrac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}\right)$

$=\left(\dfrac{-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\dfrac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=1$．

(2) 原式 $=\dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\dfrac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$．

【類題 9】

設 θ為銳角，化簡 $\cos^4\theta-\sin^4\theta+2\sin^2\theta$．

Ans：1

【詳解】

$\cos^4\theta-\sin^4\theta+2\sin^2\theta$

$\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+2\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=1$．

【例題 10】

設 θ為銳角，證明：$\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{\tan\theta}$．

【證明】

$\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=\dfrac{(1+\cos\theta)^2-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{2\cos\theta+2\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{2\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{2}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{2}{\tan\theta}$．

【類題 10】

設 θ為銳角，證明：$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$．

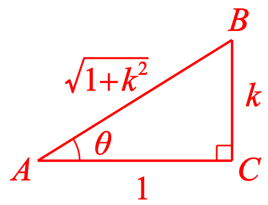
【證明】

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}.$$

【例題 11】

設 θ 為銳角， $\tan\theta=k$，試用 k 表出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$.

Ans： $\sin\theta=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ ， $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$



【詳解】

作一直角三角形 ABC，使 $\angle C=90^\circ$，

$\overline{BC}=k$， $\overline{AC}=1$， $\angle A=\theta$.

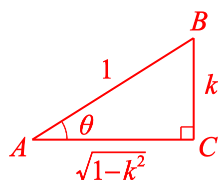
由畢氏定理知： $\overline{AB}=\sqrt{1+k^2}$ ，故

$$\sin\theta=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}，\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

【類題 11】

設 θ 為銳角， $\sin\theta=k$，試用 k 表出 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$.

Ans： $\cos\theta=\sqrt{1-k^2}$ ， $\tan\theta=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$



【解一】（利用作圖法）

作一直角三角形 ABC，使 $\angle C=90^\circ$，

$\overline{AB}=1$， $\overline{BC}=k$， $\angle A=\theta$.

由畢氏定理知： $\overline{AC}=\sqrt{1-k^2}$ ，因此

$$\cos\theta=\sqrt{1-k^2}，\quad \tan\theta=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

【解二】(利用平方關係式)

因為 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-k^2$，

又因為 $\cos\theta$是正的，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-k^2}$.

由商數關係可得 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$.

【例題 12】

已知 θ為銳角，且 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求下列各式的值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$.

(2) $\sin\theta+\cos\theta$.

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$.

Ans：(1) $\dfrac{3}{8}$，(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，(3) $\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

【詳解】

(1) 將 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$兩邊平方得到

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$.

利用平方關係式得知 $1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，

因此 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$.

(2) 將 $(\sin\theta+\cos\theta)^2$展開，得

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{4}$，

所以 $\sin\theta+\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，又因為 θ為銳角，所以

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

(3) $(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}\times\left(1-\frac{3}{8}\right)$$

$$=\frac{5}{16}\sqrt{7}.$$

【類題 12】

設 θ 為一銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$，求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ **.** **(2)** $\sin\theta-\cos\theta$ **.** **(3)** $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ **.**

Ans：(1) $\frac{1}{4}$，(2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，(3) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

【詳解】

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 兩邊平方，

得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，

故 $2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$.

(2) 因為 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{8}$.

【例題 13】

設 $\sin\theta$， $\cos\theta$為方程式 $3x^2-4x+k=0$的兩根，求

(1) 實數 k的值．

(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$的值．

Ans：(1) $\dfrac{7}{6}$，(2) $\dfrac{18}{7}$

【詳解】

(1) 由根與係數關係得知，

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$， $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{3}$．

將 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$兩邊平方，得

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{16}{9}$，

$\Rightarrow\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{16}{9}$

$\Rightarrow$ $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{16}{9}$．

因此， $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{18}$．

故 $\dfrac{k}{3}=\dfrac{7}{18}\Rightarrow k=\dfrac{7}{6}$．

(2) 利用商數關係式得知，

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{18}{7}.$$

【類題 13】

設 $\sin\theta$， $\cos\theta$為方程式 $x^2+\sqrt{2}x+k=0$的兩根，求實數 k的值．

Ans： $\dfrac{1}{2}$

【詳解】

由根與係數關係得知，

$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{2}$， $\sin\theta\cos\theta=k$ ．

將 $\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{2}$ 兩邊平方，得

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=2$，

$\Rightarrow \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$\Rightarrow\ 1+2\sin\theta\cos\theta=2$ ．

因此， $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ．故 $k=\dfrac{1}{2}$ ．

【例題 14】

已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta=\cos^2\theta$，求 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ 的值．

Ans： $\sqrt{5}+1$

【詳解】

利用平方關係式得知， $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ ．

因此， $\sin\theta=\cos^2\theta$ 可改寫為 $\sin\theta=1-\sin^2\theta$，

即 $\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$，解得

$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（負不合）．故 $\sin\theta=\cos^2\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ．

因為 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=\dfrac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$，

所以 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+1$ ．

【類題 14】

已知 θ 為銳角，且 $\cos^2\theta+\cos\theta=1$，求 $\sin^4\theta+\sin^2\theta$ 的值．

Ans：1

【詳解】

$\cos^2\theta+\cos\theta=1\Rightarrow\cos\theta=1-\cos^2\theta\Rightarrow\cos\theta=\sin^2\theta$

$\sin^4\theta+\sin^2\theta=\left(\sin^2\theta\right)^2+\sin^2\theta=\cos^2\theta+\cos\theta=1.$

ok311ex

基礎題

1. 求值：

(1) $\sin 60^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos^2 30^\circ + \tan 60^\circ$.

(2) $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ$.

Ans：(1) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ，(2) 4

【詳解】

(1) $\sin 60^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos^2 30^\circ + \tan 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{1}{2})^2 + 1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} .$$

(2) $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ$

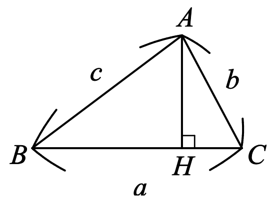
$$= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{1} + 3$$

$$= 4 .$$

2. 設△ABC的三頂點，A，B，C所對應的邊長分別為 a，b，c，$\overline{AH}$為高，則$\overline{AH}$的長為

(1) $b\sin B$. **(2)** $c\sin C$. **(3)** $b\sin C$. **(4)** $c\sin B$. **(5)** $a\sin A$.

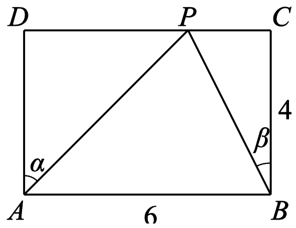


Ans：(3)(4)

【詳解】

由三角函數的定義可知。

3. 設矩形 $ABCD$中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=4$，若點 P 為 $\overline{CD}$上一點，且 $\angle PAD=\alpha$，$\angle PBC=\beta$，求 $\tan\alpha+\tan\beta$的值．



Ans：$\frac{3}{2}$

【詳解】

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\overline{DP}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DP}}{4}+\frac{\overline{CP}}{4}=\frac{\overline{CD}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

4. 化簡 $6\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)-4\left(\sin^6\theta+\cos^6\theta\right)$的值．

Ans：2

【詳解】

$$6\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)-4\left(\sin^6\theta+\cos^6\theta\right)$$

$=6[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta]-$

$4[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)]$

$=6(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)-4(1-3\sin^2\theta\cos^2\theta)$

$=6-4$

$=2.$

【備註】$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y).$

5. 設角 θ滿足 $0^\circ<\theta<45^\circ$，求 $\sin^2(45^\circ+\theta)+\sin^2(45^\circ-\theta)$的值．

Ans：1

【詳解】

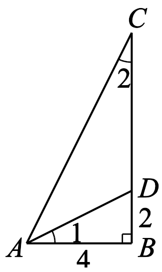
$\sin^2(45^\circ+\theta)+\sin^2(45^\circ-\theta)$

$=\sin^2(45^\circ+\theta)+\cos^2[90^\circ-(45^\circ-\theta)]$

$=\sin^2(45^\circ+\theta)+\cos^2(45^\circ+\theta)$

$=1.$

6. 如右圖，在△ABC中，已知$\angle ABC=90°$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BD}=2$，且$\angle 1=\angle 2$，求$\overline{CD}$長．



Ans：6

【詳解】

在△ABC 中，$\tan\angle 2=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}+\overline{CD}}=\dfrac{4}{2+\overline{CD}}$，

在△ABD 中，$\tan\angle 1=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

因$\angle 1=\angle 2$，故$\dfrac{4}{2+\overline{CD}}=\dfrac{1}{2}$，

$\Rightarrow\ \overline{CD}+2=8\Rightarrow\ \overline{CD}=6.$

7. 已知$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3$，求$\tan\theta$之值．

Ans：2

【詳解】

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3$，各除以 $\cos\theta$

$\Rightarrow\ \dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=3$

$\Rightarrow \tan\theta+1=3\cdot\tan\theta-3$

$\Rightarrow \tan\theta=2.$

8. 設$f(n)=\cos^n\theta+\sin^n\theta$，求$2f(6)-3f(4)$的值．

Ans：-1

【詳解】

$2f(6)-3f(4)$

$=2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)-3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$=2[(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)]$

$-3[(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta]$
$=2(1-3\cos^2\theta\sin^2\theta)-3(1-2\cos^2\theta\sin^2\theta)$
$=2-3$
$=-1.$

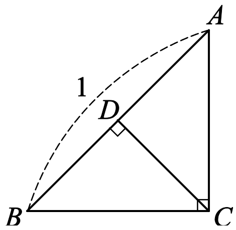
進階題

9. 求 $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$的值．

Ans：$\dfrac{89}{2}$

【詳解】
因 $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，
$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$
$=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 45^\circ+\cdots+\cos^2 2^\circ+\cos^2 1^\circ$
$=44+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2$
$=\dfrac{89}{2}.$

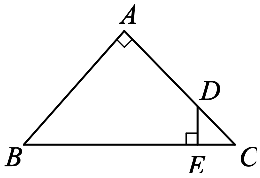
10. 如圖，△ABC中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=1$，則斜邊上的高$\overline{CD}$的長為
(1) $\sin^2 A$． **(2)** $\sin A\cos A$． **(3)** $\cos^2 A$． **(4)** $\sin A\tan A$．



Ans：(2)

【詳解】
$\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\sin A=\overline{AB}\cdot\cos A\cdot\sin A=\sin A\cos A.$

11. 如圖，△ABC中，$\angle A=90^\circ$，D在$\overline{AC}$上，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，
若$\overline{AD}=2\overline{DC}$，$\overline{AB}=4\overline{DE}$，求$\sin B$的值．



Ans：$\dfrac{3}{4}$

【詳解】
$\tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3\overline{CD}}{4\overline{DE}}=\dfrac{3\overline{CD}}{4\overline{CD}\sin C}=\dfrac{3}{4\sin C}=\dfrac{3}{4\cos B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

故 $\sin B=\dfrac{3}{4}$.

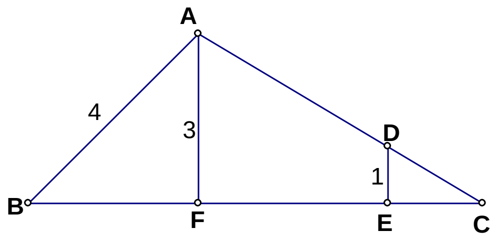
【另解】

如右圖，

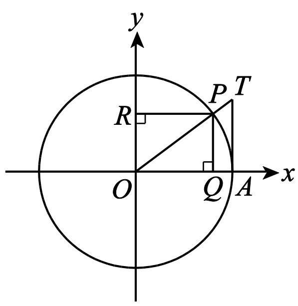
令 $\overline{DE}=1$，則

$\overline{AF}=3$，$\overline{AB}=4$，

故 $\sin B=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{4}$。



12. **右圖為一單位圓（半徑為 1），$\overline{AT}$ 為切線，$\overline{PQ}\perp x$ 軸，$\overline{PR}\perp y$ 軸，$\overline{AT}=\dfrac{3}{4}$，求矩形 $OQPR$ 的周長．**



Ans：$\dfrac{14}{5}$

【詳解】

在 $\triangle OAT$ 中，$\overline{OT}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{5}{4}$.

故 $\sin\angle TOA=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\angle TOA=\dfrac{1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

在 $\triangle OPQ$ 中，

$\sin\angle TOA=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\overline{PQ}\ \Rightarrow\ \overline{PQ}=\dfrac{3}{5}$，

$\cos\angle TOA=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\overline{OQ}\ \Rightarrow\ \overline{OQ}=\dfrac{4}{5}$.

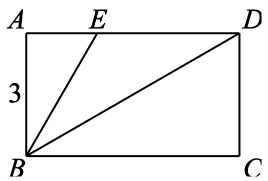
故矩形 $OQPR$ 的周長為 $2\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{14}{5}$.

【另解】

設 $\angle TOA=\theta$，則 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，

矩形 $OQPR$的周長為

$$2(\overline{OQ}+\overline{PQ})=2(\cos\theta+\sin\theta)=2(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})=\frac{14}{5}.$$



13. **如圖，矩形 $ABCD$中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BD}$，$\overline{BE}$三等分 $\angle B$，求$\triangle BDE$的周長．**

Ans：$6+4\sqrt{3}$

【詳解】

$\overline{BD}$，$\overline{BE}$三等分 $\angle B$，故

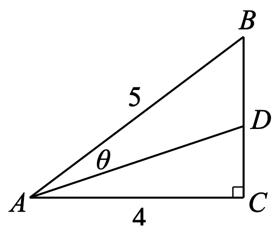
$\angle CBD=\angle DBE=\angle ABE=\angle ADB=30°$，

$\overline{AE}=3\cdot\tan 30°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$，

$\cos 30°=\frac{3}{\overline{BE}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\overline{BE}=2\sqrt{3}=\overline{DE}$，

$\sin 30°=\frac{3}{\overline{BD}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overline{BD}=6$，

故$\triangle BDE$的周長為 $6+2\sqrt{3}\times 2=6+4\sqrt{3}$.



14. **直角$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，如右圖，若$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A$的角平分線交$\overline{BC}$於 D，$\angle DAB=\theta$，求 $\tan\theta$．**

Ans：$\frac{1}{3}$

【詳解】

$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

由分角線性質知$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{5}{4}$，故

$\overline{CD}=\frac{4}{9}\times\overline{BC}=\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{3}$，

得 $\tan\theta=\tan\angle DAC==\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$.

15. 已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，且 $\sin\theta$，$\cos\theta$為方程式 $2x^2+px+q=0$的兩根，求判別式 p^2-8q的值．

Ans：$\dfrac{4}{3}$

【詳解】

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{p}{2}$，$\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{q}{2}$，

$p^2-8q=4[(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta]$

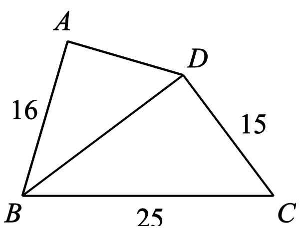
$=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta)$

$=4[(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=4\times(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2$

$=\dfrac{4}{3}$.

16. 設四邊形 $ABCD$中，$\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=25$，$\overline{CD}=15$，$\angle ABC$及$\angle BCD$皆為銳角，而 $\sin\angle ABC=\dfrac{24}{25}$，$\sin\angle BCD=\dfrac{4}{5}$．



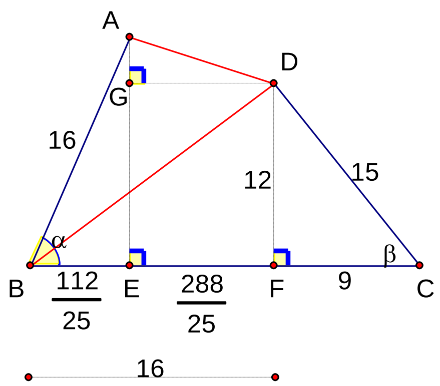
(1) 求 $\overline{BD}$的長．

(2) 求 $\overline{AD}$的長．

Ans：(1) 20，(2) 12

【詳解】

作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$，



在△ABE 中，$\sin\angle ABC=\dfrac{24}{25}$，故

$\overline{AE}=16\times\dfrac{24}{25}=\dfrac{384}{25}$，$\overline{BE}=16\times\dfrac{7}{25}=\dfrac{112}{25}$，

在△CDF 中，$\sin\angle BCD=\dfrac{4}{5}$，故

$\overline{CF}=15\times\dfrac{3}{5}=9$，$\overline{DF}=15\times\dfrac{4}{5}=12$，

(1) 在△BDF 中，

$\overline{BF}=15-9=16$，$\overline{DF}=12$，

得 $\overline{BD}=20$。

(2) 作 $\overline{DG}\perp\overline{AE}$，在△ADG 中，

$\overline{DG}=\overline{BF}-\overline{BE}=16-\dfrac{112}{25}=\dfrac{288}{25}$，

$\overline{AG}=\overline{AE}-\overline{DF}=\dfrac{384}{25}-12=\dfrac{84}{25}$，故

$\overline{AD}=\sqrt{(\dfrac{288}{25})^2+(\dfrac{84}{25})^2}=\dfrac{\sqrt{12^2(24^2+7^2)}}{25}=12$。