

數學 1 進階講義

插值多項式函數

景美女中 · 莊瑋倫老師



信望愛文教基金會

2-2-5 插值多項式函數

插值多項式函數

已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(a_1) = p, f(a_2) = q, f(a_3) = r, f(a_4) = t$ 求 $f(x) = ?$

(1) 牛頓法： $f(x) = a(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) + b(x-a_1)(x-a_2) + c(x-a_1) + d$

分別代入 a_1, a_2, a_3, a_4 即可得 $f(x)$

(2) Lagrange 法： $f(x) = p \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} + q \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} +$
 $r \frac{(x-a_2)(x-a_1)(x-a_4)}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_3-a_4)} + t \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_1)}{(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_1)}$

(3) 待定係數法： $f(x) = a(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) + b(x-a_2)(x-a_3)(x-a_1) +$
 $c(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4) + d(x-a_2)(x-a_1)(x-a_4)$

再分別代入 a_1, a_2, a_3, a_4 即可得 $f(x)$

注意事項

1. Lagrange 法列式冗長但結構完整，適用於電腦運算。
2. 值法可應用於函數值之逼近求值。

例題 1

假設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(1981) = 1$ ， $f(1982) = 9$ ， $f(1983) = 8$ ， $f(1984) = 5$ ，求 $f(1985) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans：

令

$$f(x) = g(x-1981) \Rightarrow g(0) = 1, g(1) = 9, g(2) = 8, g(3) = 5$$

由 Lagrange 法可得

$$g(x) = (1) \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + (9) \times \frac{(x)(x-2)(x-3)}{(1)(1-2)(1-3)} + (8) \times \frac{(x)(x-1)(x-3)}{(2)(2-1)(2-3)} + (5) \times \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(3)(3-1)(3-2)}$$

所求

$$\begin{aligned}
f(1985) &= g(4) \\
&= (1) \times \frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + (9) \times \frac{(4)(4-2)(4-3)}{(1)(1-2)(1-3)} \\
&\quad + (8) \times \frac{(4)(4-1)(4-3)}{(2)(2-1)(2-3)} + (5) \times \frac{(4)(4-1)(4-2)}{(3)(3-1)(3-2)} \\
&= 7
\end{aligned}$$

例題 2

三次多項式 $f(x)$ ，已知 $f(1) = f(2) = 0$ ， $f(3) = -4$ ， $f(4) = -6$ ，求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans :

由 Lagrange 法可得

$$f(x) = (-4) \times \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + (-6) \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

例題 3

已知 $\deg f(x) = 2$ 且 $f(1998) = 1$ ， $f(1999) = 2$ ， $f(2000) = 7$ ，試求 $f(2002) = ?$

Ans :

由牛頓法可得：

$$f(x) = a(x-1998)(x-1999) + b(x-1998) + c$$

$$\because f(1998) = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$\text{又} \because f(1999) = 2$$

$$\therefore b + c = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{又} \because f(2000) = 7$$

$$\therefore 2a + 2b + c = 7 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{因此，} f(x) = 2(x-1998)(x-1999) + (x-1998) + 1$$

$$\text{故，} f(2002) = 29$$

例題 4

設 $f(x)$ 為三次式，已知 $f(1) = f(2) = f(3) = 6$ ，且 $f(4) = -12$ ，求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans :

$$\text{令 } g(x) = f(x) - 6, \text{ 且 } g(1) = g(2) = g(3) = 0$$

由因式定理可假設

$$g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$


$$\Rightarrow f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 6$$

$$\because f(4) = -12$$

$$\therefore 6a + 6 = -12 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{故，} f(x) = -3(x-1)(x-2)(x-3) + 6$$

$$= -3x^3 + 18x^2 - 33x + 24$$




溫故知新

習題 1

設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(1) = f(2) = 0$ ， $f(0) = 2$ ， $f(-1) = -6$ ，
則 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

習題 2

設 $f(x)$ 為三次多項式，且 $f(1) = f(2) = f(3) = 6$ ， $f(4) = -12$ ，
試求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



解答與解析

習題 1： $f(x) = (x-1)(x-2)(2x+1)$

習題 2： $-3x^3 + 18x^2 - 33x + 24$