

# 數學 1 進階講義

## 餘式定理與因式定理

景美女中 · 莊瑋倫老師



信望愛文教基金會

## 2-2-4 餘式定理與因式定理

### 餘式定理

#### 1. 定理敘述：

設  $f(x)$  為一多項式，則  $f(x)$  除以  $(x-a)$  的餘式為  $f(a)$

多項式  $f(x)$  被  $(ax-b)$  除後得餘式為  $f\left(\frac{b}{a}\right)$

#### 2. 餘式定理證明：

設  $f(x)$  除以  $(x-a)$  的商為  $q(x)$ ，餘式為  $r$

則  $f(x) = (x-a)q(x) + r \Rightarrow f(a) = (a-a)q(a) + r \Rightarrow r = f(a)$

故餘式為  $f(a)$

### 因式定理

#### 1. 定理敘述

設  $f(x)$  為一多項式，若一次式  $(ax-b)$  為  $f(x)$  之因式  $\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

#### 2. 因式定理證明

( $\Rightarrow$ )

若  $ax-b$  為  $f(x)$  之因式，則存在多項式  $Q(x)$ ，

使得  $f(x) = (ax-b)Q(x) \Rightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = \left[a\left(\frac{b}{a}\right) - b\right]Q\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

( $\Leftarrow$ )

若  $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ ，則由餘式定理可知：

$f(x)$  除以  $(ax-b)$  的餘式為  $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

$\Rightarrow f(x) = (ax-b)Q(x)$ ，故  $ax-b$  為  $f(x)$  之因式



## 注意事項

- 因式定理為餘式定理的特例。

### 例題 1

設  $f(x)$  為三次多項式，以  $x^2 - 1$  除之餘式為  $x+1$ ，以  $x^2 + 1$  除之餘式為  $-x-1$ ，求  $f(x) = ?$

Ans :

由除法原理可知

$$\text{令 } f(x) = a(x^2 + 1)(x+1) + b(x^2 + 1) + (-x-1)$$

$$\because f(-1) = 0 \quad \therefore 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\text{又 } \because f(1) = 2 \quad \therefore 4a + 2b - 2 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{故， } f(x) = (x^2 + 1)(x+1) - x - 1$$

### 例題 2

多項式  $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{10}$  除以  $x^2 + 3x + 2$  的餘式為何？

Ans :

由除法原理可知：

$$f(x) = (x+1)Q_1(x) + 1024$$

$$= (x+2)Q_2(x) + 1$$

$$= (x+1)(x+2)Q_3(x) + (ax + b)$$

$$\begin{cases} f(-1) = 1024 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1024 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1023 \\ b = 2047 \end{cases}$$

故，餘式為  $1023x + 2047$

### 例題 3

若  $f(x) = 2x^{10} - 5x^2 + 4x + 7$ ，則  $f(x)$  除以  $x^2 + 1$  之餘式為何？

Ans :

由除法原理可知：

$$f(x) = (x^2 + 1)Q(x) + R(x)$$

令  $x^2 = -1$  代入上式可得餘式

$$R(x) = 4x + 10$$

### 例題 4

多項式  $f(x)$  除以  $x-1$  之餘式為 2，除以  $x^2 + x + 1$  之餘式為  $2x + 6$ ，  
試求  $f(x)$  除以  $x^3 - 1$  之餘式為何？

Ans :

由除法原理可得：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x) + 2 \\ &= (x^2 + x + 1)Q_2(x) + (2x + 6) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1)Q_3(x) + a(x^2 + x + 1) + (2x + 6) \end{aligned}$$

$$\because f(1) = 2$$

$$\therefore 3a + 8 = 2 \Rightarrow a = -2$$

故餘式為  $-2x^2 + 4$

### 例題 5

設  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 10$  可被  $(x^2 - 1)(x + 2)$  整除，求  $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans :

由題意可知  $x+1$ 、 $x-1$ 、 $x+2$  為  $f(x)$  一次因式

可得  $f(1) = f(-1) = f(-2) = 0$

$$\begin{cases} 1 + a + b + c - 10 = 0 \\ 1 - a + b - c - 10 = 0 \\ 16 - 8a + 4b - 2c - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a - b + c = -9 \\ 8a - 4b + 2c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 9 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = (7, 9, -7)$$

### 例題 6

設  $a > b > c > 0$ ， $a, b, c \in \square$ 。若  $x - c$  為  $f(x) = x(x - a)(x - b) - 2$  的因式，則  $a + b + c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans :

$\because x - c$  為  $f(x) = x(x - a)(x - b) - 2$  的因式  $\therefore f(c) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{c}_{+}(\underbrace{c-a}_{-})(\underbrace{c-b}_{-}) = 2 \text{ 且 } a, b, c \in \square, c - a < c - b$$

故， $c = 1, c - a = -2, c - b = -1 \Rightarrow a = 3, b = 2, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 6$

### 溫故知新

#### 習題 1

設  $g(x)$  為一多項式，以  $x+1$  除之，餘 5；以  $x-1$  除之，餘  $-3$ ，則  $g(x)$  除以  $x^2-1$  之餘式為何？

#### 習題 2

多項式  $f(x) = x^7 - 50x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 25x^2 - 30x + 5$  被  $(x-1)(x-7)$  除，其餘式為何？

### 習題 3

設以  $x^2 - 3x - 4$  除  $f(x)$  及  $g(x)$  之餘式分別為  $3x + 2$  及  $-4x + 7$ ，  
則以  $x - 4$  除  $(2x + 3)f(x) - (x + 5)g(x)$  之餘式為何？

### 習題 4

$f(x)$  被  $x + 2$  除餘式為 8，被  $2x^2 + x + 3$  除餘式為  $3x - 4$ ，  
則  $f(x)$  被  $(x + 2)(2x^2 + x + 3)$  除，其餘式為何？

### 習題 5

$f(x) = 2x^{10} - 5x^2 + 4x + 7$ ，則  $f(x)$  除以  $x^2 + 1$  之餘式為何？

### 習題 6

已知  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 47x - 15$  有因式  $3x + 1$  與  $2x - 3$ ，試求：

- (1) 數對  $(\alpha, \beta) =$  \_\_\_\_\_。
- (2) 第三個因式為 \_\_\_\_\_。

### 習題 7

【學測 87】

設  $f(x)$  為一多項式。若  $(x + 1)f(x)$  除以  $x^2 + x + 1$  的餘式為  $5x + 3$ ，  
則  $f(x)$  除以  $x^2 + x + 1$  的餘式為 \_\_\_\_\_。

### 習題 8

【學測 92】

若  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，則多項式  $g(x) = f(f(x))$  除以  $(x - 2)$  的餘式為？



習題 1：  $-4x + 1$

習題 2：  $5x - 44$

習題 3： 235

習題 4：  $4x^2 + 5x + 2$

習題 5：  $4x + 10$

習題 6 : (1) (24, 2) ; (2)  $4x+5$

習題 7 :  $2x+5$

由除法原理可知：

$$f(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + (ax + b)$$

$$(x+1)f(x) = (x+1)(x^2 + x + 1)Q(x) + (x+1)(ax + b)$$

$$= (x+1)(x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + (a+b)x + b$$

$$= (x+1)(x^2 + x + 1)Q(x) + a(x^2 + x + 1) + bx + (b - a)$$

由上式可知， $b = 5$ ， $b - a = 3 \Rightarrow b = 5$ ， $a = 2$

故，餘式為  $2x + 5$

習題 8 :

由餘式定理可知所求為

$$g(2) = f(f(2)) = f(3) = 11$$