

數學 1 進階講義

等比數列與等比級數

景美女中・莊瑋倫老師



信望愛文教基金會



3-5-3 等比數列與等比級數

定理敘述

1. 一個數列，若從其第 2 項起，每一項和它前一項的比都等於同一個常數，此數列稱為等比數列，而這常數稱為公比，通常用 r 表示，

$$\text{若 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = r,$$

則稱 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 r 的等比數列。

2. 一般以 $a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}, \dots$ 表示等比數列 $\langle a_n \rangle$ 。

3. 第 n 項 $a_n = a_1 r^{n-1} = a_m r^{n-m}$ 。

$$4. \text{ 前 } n \text{ 項和 } S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \begin{cases} na_1 & , r = 1 \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} & , r \neq 1 \end{cases}$$

定理證明或說明

【證明】

- (i) 當公比 $r = 1$ 時，前 n 項和

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n \text{ 項}} = na_1$$

- (ii) 當公比 $r \neq 1$ 時，

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ -) \quad r \cdot S_n &= \quad a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\ \hline (1-r) S_n &= a_1 - a_1 r^n \\ (1-r) S_n &= a_1 (1-r^n) \\ S_n &= \frac{a_1 (1-r^n)}{(1-r)} \end{aligned}$$



注意事項

等比數列又稱幾何數列 $G.P.$ 。



關鍵字

數列、級數、等比、公比、首項。

例題 1

已知一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的第三項與第八項分別為 2 與 -64 ，
試求其首項 = _____、公比 = _____、第 n 項 = _____。

Ans：

設首項 = a ，公比 = r

$$\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_8 = -64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot r^2 = 2 \cdots \cdots (1) \\ a \cdot r^7 = -64 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) \div (1) \Rightarrow r^5 = -32 \Rightarrow r = -2 \text{ 帶入(1)得 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{故, } a_n = \frac{1}{2} \cdot (-2)^{n-1}$$

例題 2

設下列各數列之前五項如下所示，試寫出其第 n 項 a_n 。

(1) $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

(2) $2, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

(3) $\sqrt{2}, 2, \sqrt{8}, 4, \sqrt{32}, \dots$

Ans：

(1)

$$\because a = 1, r = -1$$

$$\therefore a_n = (-1)^{n-1}$$

(2)

$$\because a = 2, r = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3)

$$\because a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$$

$$\therefore a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$$

例題 3

有一等比數列 $\langle a_n \rangle$ ，且每項皆為正數，設 $\forall a_n \in R, a_4 = 5, a_{16} = 320$ 且 $a_n > 20000$
試求 n 之最小值=_____。

Ans :

$$a_{16} = a_4 \cdot r^{12}$$

$$\Rightarrow 320 = 5 \cdot r^{12}$$

$$\Rightarrow r^{12} = 64$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$a_n > 20000$$

$$5 \cdot (\sqrt{2})^{n-4} > 20000$$

$$\frac{n}{2} - 2 \geq 12 \Rightarrow n \geq 28$$

例題 4

小美將 10000 元存入銀行，年利率 2%，
已知半年計息一次，採複利計算，
試求二年後本利和=_____元。

Ans :

$$\because \text{年利率為 } 2\%$$

$$\therefore \text{半年利率為 } 1\%$$

$$\text{所求} = 10000 \times (1.01)^4 \approx 10406 \text{ (元)}$$

例題 5

試求 $9 + 99 + 999 + \dots$ 至第 n 項=_____。

Ans :

$$\begin{aligned}\text{所求} &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1) \\ &= \frac{10(10^n-1)}{10-1} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n-1) - n\end{aligned}$$

例題 6

設三數成等比數列，其和為 28，平方和為 336，求此三數為_____。

Ans :

假設此三數分別為 $\frac{a}{r}$ 、 a 、 ar ，由題意可知：

$$\begin{cases} \frac{a}{r} + a + ar = 28 \\ \frac{a^2}{r^2} + a^2 + a^2 r^2 = 336 \end{cases}$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{r} + 1 + r \Rightarrow \begin{cases} at = 28 & \cdots \cdots (1) \\ a^2(t^2 - 2t) = 336 & \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 \div (2) \text{ 得 } t = \frac{7}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ or } 2 \text{ 代回(1)得 } a = 4$$

故，此三數分別為 4、8、16 或 16、8、4



溫故知新

習題 1

假設某鎮每年的人口數逐年成長，且成一等比數列。

已知此鎮十年前有 25 萬人，現有 30 萬人，那麼二十年後，試求此鎮人口應有_____萬人？（求到小數點後一位）

習題 2

試在 5 與 40 之間插入 5 個正數，使這 7 個數成等比數列，試求此數列的公比=_____。

習題 3

設三數成等比數列，其和為 13，其積為 27，
試求此三數為_____。

習題 4

將等比級數 $4 + (-6) + 9 + \cdots + \frac{729}{16}$ 用 $\sum$ 表示並求其和。

習題 5

有一等比數列，首項為 $\frac{9}{8}$ ，第 n 項為 $\frac{1}{3}$ ，前 n 和為 $\frac{65}{24}$ ，
試求(1) $n =$ _____，(2) 公比 $r =$ _____。

習題 6

設有一等比數列之首項為 2，公比為 3，若第 $n+1$ 項至第 m 項之和為 720 且 $m > n$ 則 $(m, n) =$ _____。

習題 7

【學測 89】

假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增長率均固定，
已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人誕生在賽拉耶佛，
根據這些資料推測 2023 年世界人口數最接近下列哪一個數？
(A) 75 億 (B) 80 億 (C) 86 億 (D) 92 億 (E) 100 億。

習題 8

【學測 87】

等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_4 = 2 - \sqrt{5}$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ， $n \geq 1$ ，
則 $\langle a_n \rangle$ 的公比為_____。

習題 9

【學測 91】

某公司民國 85 年營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50 %。
87，88，89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元。
則該公司 89 年的成長率為_____。

習題 10

【指考數乙 98】

陳先生三年前買了一輛剛出廠的新車買價 100 萬元；該汽車的價值在第一年後折舊 20%，
第二年以後每年折舊前一年車價的 15%。

陳先生現在想用這部車換新車，試問舊車可抵多少萬元？

解答與解析

習題 1 : 43.2

習題 2 : $\sqrt{2}$

習題 3 : 9、3、1 或 1、3、9

習題 4 : $\sum_{k=1}^7 4 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{k-1}$; $\frac{463}{16}$

習題 5 : (1) $n=4$ (2) $r=\frac{2}{3}$

習題 6 : (6, 2)

習題 7 : (C)

假設每年增長率為 r

由題意可知，

$$50 \cdot r^{12} = 60 \Rightarrow r^{12} = \frac{6}{5}$$

$$\text{所求} = 60 \cdot r^{24} = 60 \cdot (r^{12})^2 = 86.4$$

故選(C)

習題 8 : $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

假設公比為 r ，則 $a_2=r$ ， $a_3=r^2$

$$\therefore a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$\therefore a_3 = a_2 + a_1$$

$$\Rightarrow r^2 = r + 1 \quad \therefore r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{但 } a_4 = 2 - \sqrt{5} \text{，故 } r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

習題 9 : 100%

假設成長率為 r

$$6 \cdot (1+r)^3 = 48$$

$$(1+r)^3 = 8$$

$$r = 1$$

故，成長率為100%

習題 10 : 58 萬元

$$100 \times (1-0.2) \times (1-0.15)^2 = 57.8$$

故，四捨五入取 58 萬元