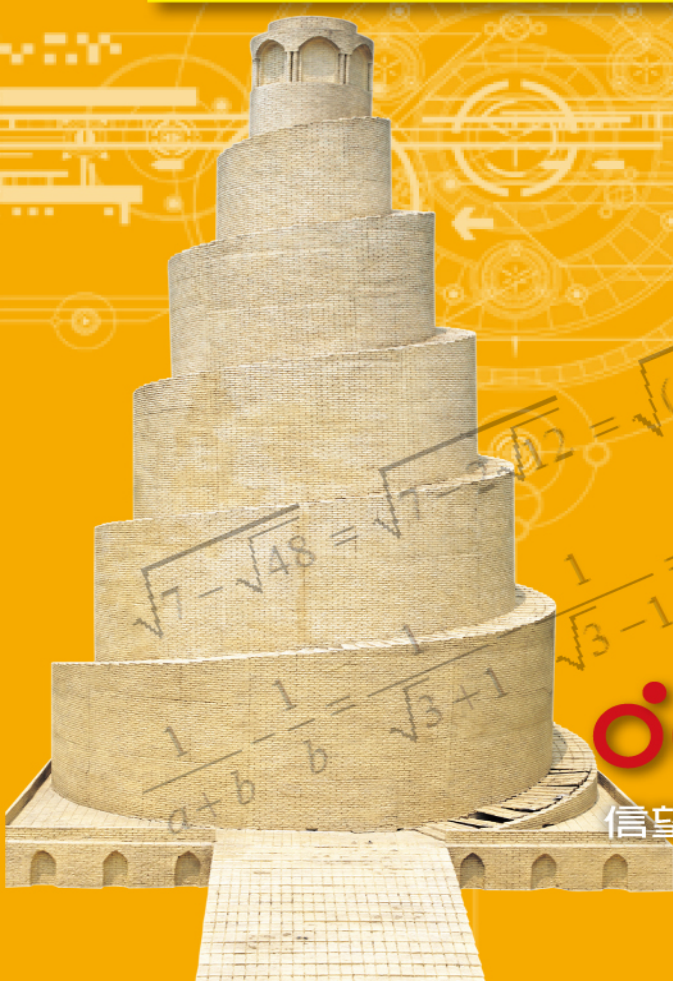


102 學測解析

數學科

陳清海 老師



信望愛文教基金會

大學入學考試中心

102 學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 $\frac{7}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{50}{50}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分，而且他不符合選模範生資格。請問下列哪一格選項的推論是正確的？

(1) 小文的英文成績未達 70 分

(2) 小文的數學成績不及格

(3) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(4) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(5) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

Ans : (5)

【詳解】

他英文成績須要 70 分以上，且數學成績要 60 分以上，

因他沒參選資格，故至少其中一科未達標準，

即他英文未達 70 分或數學成績不及格(未達 60 分)，

故選(5)

【備註】 $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

2. 令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

(1) $a > b > c$ ，(2) $a > c > b$ ，(3) $b > a > c$ ，(4) $b > c > a$ ，(5) $c > b > a$

Ans : (4)

【詳解】

$2a - 2c = 2.6^9(2 \times 2.6 - 2 - 2.6^2 + 1) < 0$ ，故 $a < c$ 。

$2b - 2c = 2.6^9(2 \times 2.6^2 - 2 \times 2.6 - 2.6^2 + 1) \doteq 2.56 > 0$ ，故 $b > c$ ，

故得 $b > c > a$ 。

k=	2.6	9	10	11	
y=		5429.5037	14116.71	36703.445	
a=	8687.2059	b=	22586.735	c=	15636.971

3. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？

(1) $\frac{1}{3}$, (2) $\frac{5}{12}$, (3) $\frac{1}{2}$, (4) $\frac{3}{5}$, (5) $\frac{2}{3}$

Ans : (3)

【詳解】

P(丙白 | 甲乙同色)

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1}{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{20} + \frac{2}{20}}{\frac{6+2}{20}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}。$$

4. 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1)

x	2	3	5
y	1	13	1

(2)

x	2	3	5
y	3	10	2

(3)

x	2	3	5
y	5	7	3

(4)

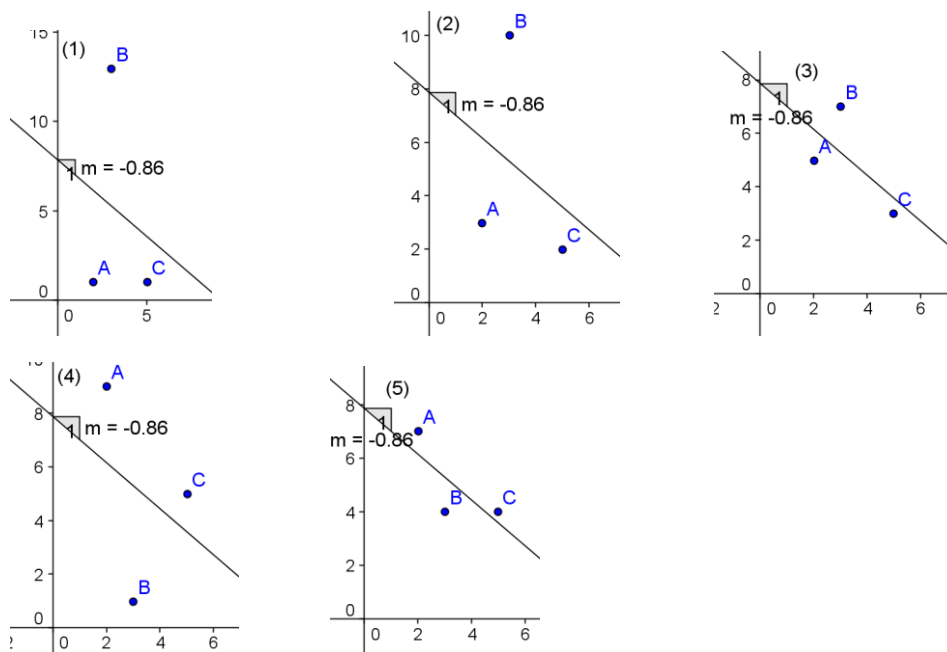
x	2	3	5
y	9	1	5

(5)

x	2	3	5
y	7	4	4

Ans : (5)

【詳解】



相關係數最小表示三點愈接近迴歸線，故選(5)。

【另解】

x	y	離差x	離差y	平方x	平方y	xy	
2	7	-1.333	2	1.778	4	-2.7	r(1)= -0.2
3	4	-0.333	-1	0.111	1	0.3	r(2)= -0.3
5	4	1.667	-1	2.778	1	-1.7	r(3)= -0.7
3.3	5	0	0	4.667	6	-4	r(4)= -0.3
				2.16	2.449	相關係數	-0.8

由上 EXCEL 計算得

$r_1 = -0.2$ ， $r_2 = -0.3$ ， $r_3 = -0.7$ ， $r_4 = -0.3$ ， $r_5 = -0.8$ 。

5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裝奇數顆。請選出分裝的方法數。

(1) 55，(2) 66，(3) 132，(4) 198，(5) 253

Ans：(2)

【詳解】

設黃色籃子裝 x 顆雞蛋，

綠色籃子裝 y 顆雞蛋，

紅色籃子裝 z 顆雞蛋，則

$x + y + z = 24$ ，且 x, y 為奇數。

$x = 1$ ，則 $y = 1, 3, \dots, 21$ ，共 11 種裝法，

$x = 3$ ，則 $y = 1, 3, \dots, 19$ ，共 10 種裝法，

$x = 5$ ，則 $y = 1, 3, \dots, 17$ ，共 9 種裝法，

.....

$x = 21$ ，則 $y = 1$ ，共 1 種裝法，

故共有 $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 66$ 種裝法。

6. 莎韻觀測遠方等速垂直上升的熱氣球。在上午 10：00 熱氣球的仰角為 30° ，到上午 10：10 仰角變成 34° 。請利用下表判斷到上午 10：30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個角度。

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin \theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos \theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan \theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1) 39° ，(2) 40° ，(3) 41° ，(4) 42° ，(5) 43°

Ans：(3)

【詳解】

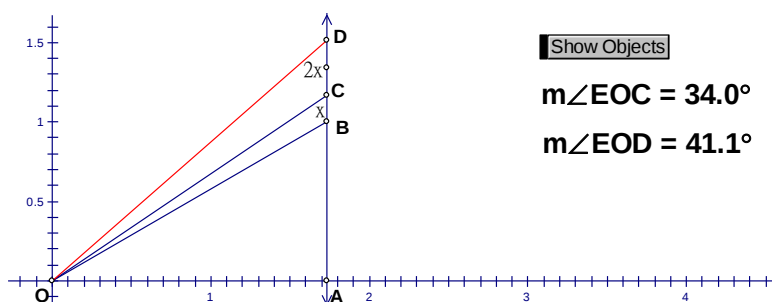
如下圖， $B(\sqrt{3}, 1)$ ， $C(\sqrt{3}, 1+x)$ ， $D(\sqrt{3}, 1+3x)$ 。

$$\tan 34^\circ = \frac{1+x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot \tan 34^\circ - 1$$

$$\tan x \angle AOD = \frac{1+3x}{\sqrt{3}} = \frac{1+3(\sqrt{3} \times 0.675 - 1)}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{1+3 \times 0.1691}{1.732} = \frac{1.5037}{1.732} = 0.8682,$$

查表得 $\angle AOD \doteq 41^\circ$ 。



二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設 n 為正整數，符號 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 自乘 n 次，

令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，請選出正確選項

- (1) $a_2 = 1$
- (2) a_1, a_2, a_3 為等比數列
- (3) d_1, d_2, d_3 為等比數列
- (4) b_1, b_2, b_3 為等差數列
- (5) c_1, c_2, c_3 為等差數列

Ans : (1)(2)(3)(5)

【詳解】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 0, d_1 = 2.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, a_2 = 1, b_2 = 3, c_1 = 0, d_2 = 4.$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, a_3=1, b_3=7, c_3=0, d_3=8。$$

- (1) $a_2=1$
- (2) a_1, a_2, a_3 成等比，公比為 1
- (3) $d=1, d_2, d_3$ 成等比，公比為 2
- (4) b_1, b_2, b_3 不成等差，也不成等比
- (5) c_1, c_2, c_3 成等差，公差為 0

8. 設 $a>1>b>0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (1) $(-a)^7 > (-a)^9$ ，(2) $b^{-9} > b^{-7}$ ，(3) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$ ，(4) $\log_a 1 > \log_b 1$ ，
 (5) $\log_a b \geq \log_b a$

Ans : (1)(2)

【詳解】

- (1) 對
- (2) 對

$$(3) a>1>b \Rightarrow \frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b} \Rightarrow \log_{10} \frac{1}{a} < 0 < \log_{10} \frac{1}{b}$$

$$(4) \log_a 1 = \log_b 1 = 0$$

a=	1.1	b=	0.1	-24.1589	-0.04139	-24.1175
				前者	後者	

(5)

9. 設 $a<b<c$ 。已知實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a, 0)$ ， $(b, 0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y=g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(b, 0)$ ， $(c, 0)$ 兩點。請選出 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和 x 軸僅交於一點的直線
- (3) 和 x 軸無交點的拋物線
- (4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和 x 軸交於兩點的拋物線

Ans : (4)(5)

【詳解】

$$f(x)=p(x-a)(x-b), p>0,$$

$$g(x)=q(x-b)(x-c), q>0,$$

$$y=h(x)=f(x)+g(x)$$

$$h(x)=(x-b)[p(x-a)+q(x-c)]$$

$$h(x)=(x-b)[(p+q)x-(a+c)]=0$$

必有兩個實根，但可能是重根，

- (4) $y=h(x)$ 可能是與 x 軸相切的拋物線。
 (5) $y=h(x)$ 可能是與 x 軸交於兩點的拋物線。

10. 坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1, 0)$ 和 $Q_2(-1, 0)$ 。在下列各方程式的圖形中，

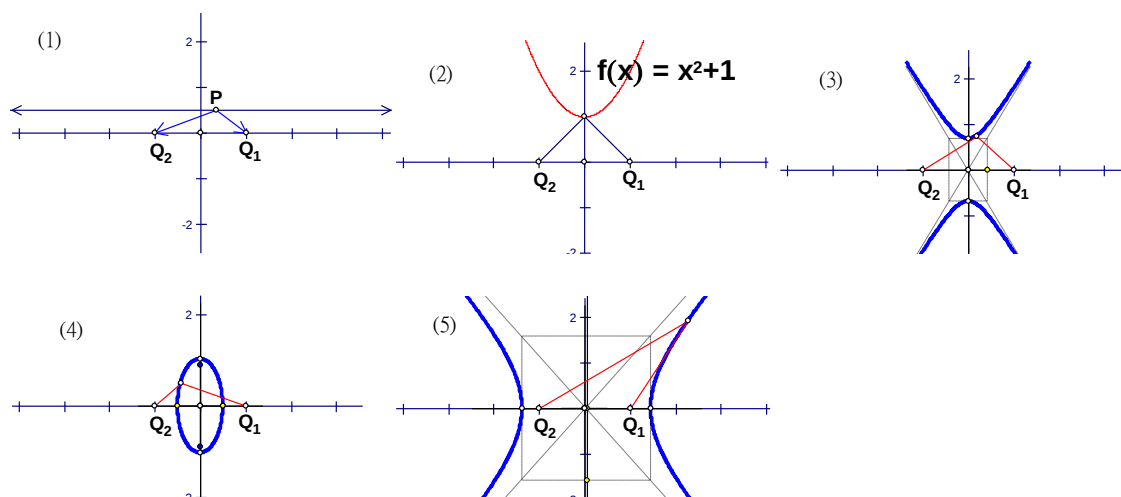
請選出其上至少有一個點 P 滿足 $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} < 0$ 的選項。

(1) $y = \frac{1}{2}$, (2) $y = x^2 + 1$, (3) $-x^2 + 2y^2 = 1$, (4) $4x^2 + y^2 = 1$, (5) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

Ans : (1)(3)(4)

【詳解】

$\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} < 0$ ，表兩向量的夾角大於 90° 。

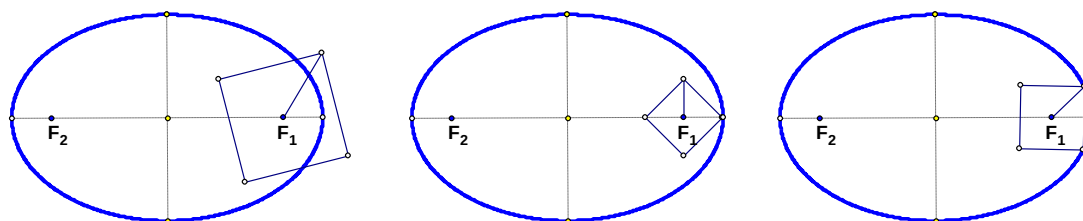


11. 設 F_1, F_2 為橢圓 Γ 的兩個焦點。S 為以 F_1 為中心的正方形(S 的各邊可不與 Γ 的對稱軸平行)。試問 S 可能有幾個頂點落在 Γ 上？

(1) 1 , (2) 2 , (3) 3 , (4) 4 , (5) 0

Ans : (1)(2)(5)

【詳解】



$$\Rightarrow a = 3(-3a) - 40$$

$$\Rightarrow a = -4, b = 12。$$

- C. 坐標平面中 $A(a, 3)$, $B(16, b)$, $C(19, 12)$ 三點共線。已知 C 不在 A, B 之間，且 $\overline{AC} :$

$$\overline{BC} = 3 : 1, \text{ 則 } a + b = \underline{\hspace{2cm}}。$$

Ans : 19

【詳解】

$$\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow (16 - a, b - 3) = 2(19 - 16, 12 - b)$$

$$\Rightarrow 16 - a = 6, b - 3 = 2(12 - b)$$

$$\Rightarrow a = 10, b = 9$$

$$\Rightarrow a + b = 19。$$

- D. 阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降價為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉公斤數為 t ，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 $at + b$ ，其中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans : $a = -2, b = 70$

【詳解】

設第一天賣 x 公斤，第一天賣 y 公斤，則

$$40x + 36y + 32(100 - x - y) = 3720, \text{ 即}$$

$$8x + 4y = 520 \text{ 或 } 2x + y = 130。$$

$$t = 100 - x - y$$

$$\Rightarrow y = 100 - x - t = 100 - (65 - \frac{1}{2}y) - t$$

$$\Rightarrow 2y = 200 - 130 + y - 2t$$

$$\Rightarrow y = -2t + 70$$

$$\text{即 } a = -2, b = 70。$$

- E. 坐標平面上，一圓與直線 $x - y = 1$ 以及直線 $x - y = 5$ 所截的弦長皆為 14。則此圓的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}\pi$ 。

Ans : 51

【詳解】

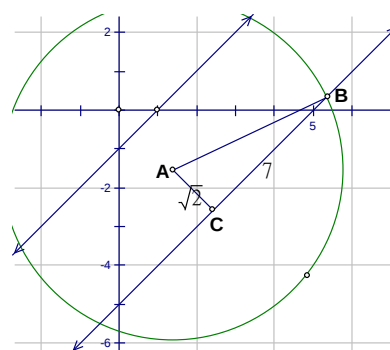
兩平行線的距離為 $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ，

故圓心到任一直線的距離為 $\sqrt{2}$ 。

如右圖，

半徑 $\overline{AB} = \sqrt{7^2 + 2} = \sqrt{51}$ ，

故此圓面積為 51π 。



- F. 令 $\vec{A}$ ， $\vec{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\vec{A}$ 的長度為 1， $\vec{B}$ 的長度為 2，且 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 之間的夾角為 60° 。令 $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$ ， $\vec{v} = x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B}$ ，其中 x, y 為實數且符合 $6 \leq x + y \leq 8$ 以及 $-2 \leq x - y \leq 0$ ，則內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 的最大值為_____。

Ans : 31

【詳解】

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (x\vec{a} + y\vec{b})$$

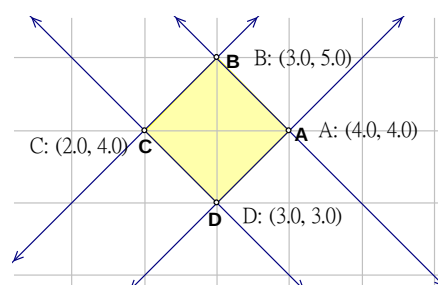
$$= x \cdot |\vec{a}|^2 + y \cdot |\vec{b}|^2 + (x+y) \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= x + 4y + (x+y) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= x + 4y + x + y$$

$$= 2x + 5y,$$

當 $x=3$ ， $y=5$ 時得 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2x + 5y$ 的最大值為 31。



- G. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC} =$ _____。(化成最簡根式)

Ans : $4\sqrt{15}$

【詳解】

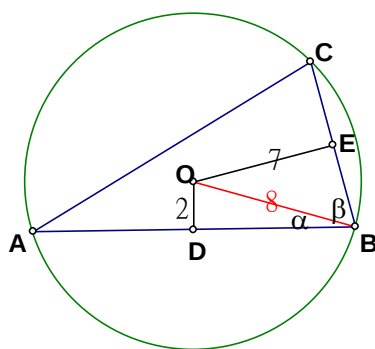
如下圖， $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ， $\sin \beta = \frac{7}{8}$ ，

得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ， $\cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ 。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{8\sqrt{15}}{32} = \frac{\sqrt{15}}{4}.\end{aligned}$$

由正弦定理 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R$ ，得

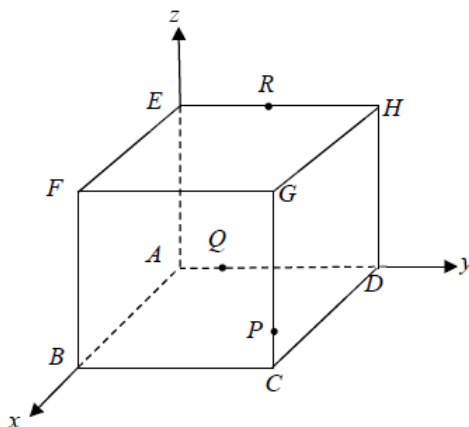
$$\overline{AC} = 2R \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15}。$$



- H. 如下圖。在座標空間中， A, B, C, D, E, F, G, H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個頂點的座標為 $A(0, 0, 0) \sim (6, 0, 0)$ ， $D(0, 6, 0)$ 及 $E(0, 0, 6)$ ，

P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP} : \overline{PG} = 1 : 5$ ， R 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER} : \overline{RH} = 1 : 1$ ， Q 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P, Q, R 這三點的平面，與直線 $\overline{AG}$ 不相交，則

Q 點的 y 座標為_____。(化成最簡分數)



Ans : $\frac{15}{11}$

【詳解】

$P(6, 6, 1)$ ， $R(0, 3, 6)$ ， $G(6, 6, 6)$ ，設 $Q(0, y, 0)$ ，

$$\overrightarrow{PQ} = (-6, y-6, -1), \quad \overrightarrow{PR} = (-6, -3, 5),$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (5y-33, 36, 6y-18),$$

直線 $\overline{AG}$ 的方向向量為 $(6, 6, 6)$ ，

如直線 $\overline{AG}$ 與平面 PQR 不相交，

則直線 $\overline{AG}$ 與平面 PQR 的法向量垂直，故

$$6(5y-33) + 6 \times 36 + 6(6y-18) = 0$$

$$\Rightarrow 5y - 33 + 36 + 6y - 18 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{11}。$$