

數學 1 進階講義

複數系介紹

景美女中・林志強老師



信望愛文教基金會

2-3-1 複數系介紹



定理敘述

1. 虛數的單位： $i = \sqrt{-1}$

(1) 當 $b > 0$ 時， $\sqrt{-b} = \sqrt{b}i$

(2) $i^2 = -1$

2. 複數的定義：

設 a, b 為實數，形如 $a+bi$ 的數稱為複數，其中 a 稱為 $a+bi$ 的實部， b 稱為 $a+bi$ 的虛部

3. 共軛複數：

設 a, b 為實數，則 $a-bi$ 與 $a+bi$ 互稱為共軛複數，以 $a-bi = \overline{a+bi}$ 表示

4. 複數的相等：

設 a, b, c, d 為實數，若 $a+bi = c+di$ ，則 $a = c$ 且 $b = d$

5. 複數的四則運算：設 a, b, c, d 為實數

(1) 加法： $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

(2) 減法： $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

(3) 乘法： $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

(4) 除法： $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

(c, d 不同時為 0)

6. (1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{ab}, & \text{若 } a < 0, b < 0 \\ \sqrt{ab}, & \text{其他} \end{cases}$

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{a}{b}}, & \text{若 } a > 0, b < 0 \\ \sqrt{\frac{a}{b}}, & \text{其他} \end{cases}$

7. i 的性質：

$$i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad i^{4k} = 1,$$

其中 k 為正整數或 0



定理證明或說明

設 a, b 為實數，複數 $a+bi$ ：

當 $b=0$ 時， $a+0i=a$ 。因此，實數是虛部為 0 的複數。若 $b \neq 0$ 的複數，稱為虛數。當 $a=0$ 時，虛數 bi ($b \neq 0$) 又被稱為純虛數。由此可知，實數系可再擴張成一個更大的數系，稱為複數系。



注意事項

虛數不能比大小



關鍵字

虛數、複數、共軛複數

例題 1

下列敘述何者正確？

(1) $\sqrt{-9} = 3i$ (2) $(\sqrt{-3})^2 = \sqrt{(-3)^2}$ (3) $-2+3i$ 的實部為 -2 ，虛部為 $3i$

(4) $\sqrt{3}$ 是實數，但不是複數 (5) $4+3i > 3+2i$

Ans：(1)

【解】

$$(2) (\sqrt{-3})^2 = (\sqrt{3}i)^2 = (\sqrt{3})^2 \times i^2 = -3 \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

(3) $-2+3i$ 的實部為 -2 ，虛部為 3

(4) $\sqrt{3}$ 是實數，也是複數

(5) 虛數不能比大小

例題 2

已知複數 $z_1 = 3 - 4i$ ， $z_2 = 5 + 2i$ ，試求下列各值：

(1) $z_1 + z_2$ (2) $z_1 - z_2$ (3) $z_1 z_2$ (4) $\frac{z_1}{z_2}$

Ans : (1) $8 - 2i$ (2) $-2 - 6i$ (3) $23 - 14i$ (4) $\frac{7 - 26i}{29}$

【解】

$$(1) z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (5 + 2i) = (3 + 5) + (-4 + 2)i = 8 - 2i$$

$$(2) z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (5 + 2i) = (3 - 5) + (-4 - 2)i = -2 - 6i$$

$$(3) z_1 z_2 = (3 - 4i)(5 + 2i) = 3(5 + 2i) - 4i(5 + 2i) = 15 + 6i - 20i - 8i^2 = 23 - 14i$$

$$(4) \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 4i}{5 + 2i} = \frac{(3 - 4i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{15 - 6i - 20i + 8i^2}{5^2 - (2i)^2} = \frac{7 - 26i}{29}$$

例題 3

已知 $(2 + 3i)x + (4 - 2i)y = 6 - 7i$ ，試求實數 x, y 的值

Ans : $x = -1$ ， $y = 2$

【解】

$$(2 + 3i)x + (4 - 2i)y = 6 - 7i \Rightarrow (2x + 4y) + (3x - 2y)i = 6 - 7i$$

$\therefore 2x + 4y$ 及 $3x - 2y$ 為實數

$$\therefore \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 2$$

例題 4

設 a, b 為實數，且 $\frac{1}{3+i} + \frac{1}{a+bi} = \frac{23+i}{50}$ ，試求 a, b 之值

Ans : $a = 4$ ， $b = -3$

【解】

$$\frac{1}{3+i} + \frac{1}{a+bi} = \frac{23+i}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+bi} = \frac{23+i}{50} - \frac{1}{3+i} = \frac{23+i}{50} - \frac{3-i}{10} = \frac{23+i-15+5i}{50} = \frac{4+3i}{25}$$

$$\Rightarrow a+bi = \frac{25}{4+3i} = \frac{25(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = 4-3i$$

$$\Rightarrow a=4, b=-3$$

例題 5

設複數 z_1 的虛部為 -2 ，複數 z_2 的實部為 3 ，且 z_1+z_2 的實部為 7 ， z_1z_2 的虛部為 14 ，試求複數 z_1 與 z_2 。

Ans: $z_1 = 4-2i$ ， $z_2 = 3+5i$

【解】

設 $z_1 = a-2i$ ， $z_2 = 3+bi$ ，其中 a, b 為實數

$$z_1 + z_2 = (a+3) + (b-2)i$$

$$\because z_1 + z_2 \text{ 的實部為 } 7 \quad \therefore a+3=7 \quad \Rightarrow \quad a=4 \Rightarrow \quad z_1 = 4-2i$$

$$z_1 z_2 = (4-2i)(3+bi) = 12 + 4bi - 6i - 2bi^2 = (12+2b) + (4b-6)i$$

$$\because z_1 z_2 \text{ 的虛部為 } 14 \quad \therefore 4b-6=14 \quad \Rightarrow \quad b=5 \Rightarrow \quad z_2 = 3+5i$$

例題 6

設 a 為實數，若 $z = \frac{3+2i}{a-4i}$ ，且 $z = \bar{z}$ ，試求實數 a 值。

Ans: $a = -6$

【解】

方法一

$$z = \frac{3+2i}{a-4i} = \frac{(3+2i)(a+4i)}{(a-4i)(a+4i)} = \frac{3a-8}{a^2+16} + \frac{2a+12}{a^2+16}i$$

$$z = \bar{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{3a-8}{a^2+16} + \frac{2a+12}{a^2+16}i = \frac{3a-8}{a^2+16} - \frac{2a+12}{a^2+16}i \quad \Rightarrow \quad \frac{2a+12}{a^2+16} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -6$$

方法二

$$z = \bar{z} \quad \Rightarrow \quad z \text{ 為實數} \quad \Rightarrow \quad \text{令 } z = \frac{3+2i}{a-4i} = k \text{ 為實數} \quad \Rightarrow \quad 3+2i = ka-4ki$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ka = 3 \\ -4k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \quad a = -6$$

例題 7

已知 $a > 0$ ， $b > 0$ 時， $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ， $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ，利用此性質判斷下列各題中的 z_1 與 z_2 是否相等，並驗證定理的第 6 點。

$$(1) z_1 = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{12}, z_2 = \sqrt{(-3) \times 12}$$

$$(2) z_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-12}, z_2 = \sqrt{3 \times (-12)}$$

$$(3) z_1 = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}, z_2 = \sqrt{(-3) \times (-12)}$$

$$(4) z_1 = \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}, z_2 = \sqrt{\frac{-3}{12}}$$

$$(5) z_1 = \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-12}}, z_2 = \sqrt{\frac{-3}{-12}}$$

$$(6) z_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}, z_2 = \sqrt{\frac{3}{-12}}$$

Ans : (1) 是 (2) 是 (3) 否 (4) 是 (5) 是 (6) 否

【解】

$$(1) z_1 = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3i} \times \sqrt{12} = \sqrt{36i} = 6i, z_2 = \sqrt{(-3) \times 12} = \sqrt{-36} = 6i$$

$$(2) z_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-12} = \sqrt{36i} = 6i, z_2 = \sqrt{3 \times (-12)} = \sqrt{-36} = 6i$$

$$(3) z_1 = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} = \sqrt{3i} \times \sqrt{12i} = \sqrt{36i^2} = -6, z_2 = \sqrt{(-3) \times (-12)} = \sqrt{36} = 6$$

$$(4) z_1 = \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}}i = \frac{1}{2}i, z_2 = \sqrt{\frac{-3}{12}} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}i$$

$$(5) z_1 = \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{12i}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \frac{1}{2}, z_2 = \sqrt{\frac{-3}{-12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(6) z_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12i}} = \sqrt{\frac{3}{12}} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{2} \times \frac{i}{i^2} = -\frac{1}{2}i, z_2 = \sqrt{\frac{3}{-12}} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}i$$

例題 8

試求下列各式的值：

(1) $i^{99} + i^{100}$ (2) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$

Ans : (1) $1-i$ (2) $-1+i$

【解】

(1) $i^{99} + i^{100} = 1-i$

(2) 當 k 為正整數或0時

$$i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} + i^{4k+4} = i - 1 - i + 1 = 0$$

故原式

$$= (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \dots + (i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48}) + i^{49} + i^{50}$$

$$= i^{49} + i^{50} = -1 + i$$



溫故知新

習題 1

選出正確的選項：

- (1) $\sqrt{-9} = 3i$ (2) $-5 + 3i$ 的實部為 -5 ，虛部為 $3i$ (3) $\sqrt{2}$ 是複數
(4) $2 - i$ 是虛數，也是複數 (5) $2 + 5i > 2 + 3i$

習題 2

將下列複數化成 $a + bi$ (a, b 為實數) 的形式：

(1) $(2 - 3i) + (-3 + 5i)$ (2) $(1 + 2i)(2 - i)$

(3) $\frac{2-i}{1+i}$ (4) $(1+i)^2 + (1+i)^4$

習題 3

x, y 皆為實數， $i = \sqrt{-1}$ ，若 $(2x + y - 7) + (-x + 2y + 2)i$ 為實數，而 $(-x + 3y - 1) + (x + y - 1)i$ 為純虛數，則 $x + y =$ _____

習題 4

設 a, b 均為實數，滿足 $\frac{1}{2-i} + \frac{1}{3+i} + \frac{1}{a+bi} = 0$ 時，求 b 之值

習題 5

已知複數 z 的實部為 2，且 $\frac{1}{z}$ 的虛部為 $\frac{1}{4}$ ，求 z

習題 6

設 a, b 為實數， $\frac{2a+i}{4+3i}$ 的共軛複數為 $-5+bi$ ，則 $a+b=$ _____

習題 7

下列何者為真？

(1) $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2}$ (2) 若 a, b 均為實數且 $b > a$ ，則 $\sqrt{a-b} = \sqrt{b-ai}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\frac{3}{-2}}$ (4) 若 $ab > 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ (5) 若 $ab > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

習題 8

試求下列各式的值：

(1) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{100}$ (2) $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$

習題 9

【102 學測】

設 a, b 為實數且 $(a+bi)(2+6i) = -80$ ，其中 $i^2 = -1$ ，則數對 (a, b) 之值為何？



習題 1：(1)(3)(4)

習題 2：(1) $-1+2i$ (2) $4+3i$ (3) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ (4) $-4+2i$

習題 3：11

習題 4 : $\frac{1}{5}$

習題 5 : $z = 2 - 2i$

習題 6 : -20

習題 7 : $(2)(5)$

習題 8 : $(1) -1 \quad (2) 0$

習題 9 : $(-4, 12)$