數學 1 進階講義

實　數

景美女中．林志強老師

信望愛文教基金會

1-3　實　數

實　數

1.實數是由有理數和無理數共同組成的。

2.對任一實數 a ，$a^2 \geq 0$ 恆成立。

3.若 $a \geq 0$ ，$b \geq 0$ ，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立，其中等號成立的條件是 $a=b$ 。

例題 1

已知實數 x, y 滿足 $|x+2y-4|+(2x-y+7)^2=0$，求 x, y 的值

例題 2

設 a, b, c, d 表實數且 $a>b, c>d$，則下列何者恆成立？

(1)$a+c>b+d$　(2)$a-c>b-c$　(3)$a-c>b-d$　(4)$ac>bd$　(5)若 $a \neq 0, b \neq 0$，則 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

例題 3

已知 a, b 是正實數且 $ab=18$，試求 $a+2b$ 的最小值及所對應的數對(a,b)

例題 4

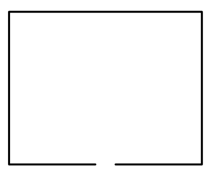
已知 a, b 是正實數且 $3a+2b=12$，試求 ab 的最大值及所對應的數對(a,b)

例題 5

面積為 25 的所有矩形中，哪一種矩形的周長為最短？

例題 6

一農夫想用 66 公尺長的竹籬圍出一長方菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如右圖示，此農夫所能圍成的最大面積為何？



2 公尺

例題 7

設 $x>-3$，則 $\dfrac{1}{x+3}+x+7$ 的最小值為____________

解答與解析

例題 1：$x=-2$，$y=3$

$\boxed{\text{解析}}$：因為 $|x+2y-4| \geq 0$ 且 $(2x-y+7)^2 \geq 0$

又 $|x+2y-4|=(2x-y+7)^2=0$

所以 $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-y+7=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2, y=3$

例題 2：(1)(2)

$\boxed{\text{解析}}$：(3)不一定，例如 $a=8$，$b=5$，$c=7$，$d=3$

(4)不一定，例如 $a=8$，$b=2$，$c=-1$，$d=-3$

(5)不一定，例如 $a=8$，$b=-5$

例題 3：12, (6,3)

$\boxed{\text{解析}}$：利用算幾不等式可得

$$\frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{a \times 2b} = \sqrt{2ab} = \sqrt{2 \times 18} = 6 \Rightarrow a+2b \geq 12$$

所以 $a+2b$ 的最小值為 12

此時 $a=2b=6 \Rightarrow (a,b)=(6,3)$

例題 4：6, (2,3)

$\boxed{\text{解析}}$：利用算幾不等式可得

$$\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a \times 2b} \Rightarrow 6 \geq \sqrt{6ab} \Rightarrow 36 \geq 6ab \Rightarrow 6 \geq ab$$

所以 ab 的最大值為 6

此時 $3a=2b=6 \Rightarrow (a,b)=(2,3)$

例題 5：邊長為 5 的正方形

$\boxed{\text{解析}}$：設矩形的長為 a，寬為 b

面積為 $ab=25$ ，周長為 $2a+2b$

利用算幾不等式可得

$$\frac{2a+2b}{2}\geq\sqrt{2a\times2b}=\sqrt{4ab}=\sqrt{4\times25}=10$$

$$\Rightarrow\quad 2a+2b\geq20$$

所以周長的最小值為 20

此時 $2a=2b=10\quad\Rightarrow\quad a=b=5$ ，即邊長為 5 的正方形

例題 6：289 平方公尺

$\boxed{\text{解析}}$：設矩形的長為 a，寬為 b

面積為 ab　周長為 $2a+2b$=66+2 $\Rightarrow\quad a+b=34$

利用算幾不等式可得

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\quad\Rightarrow\quad17\geq\sqrt{ab}\quad\Rightarrow\quad289\geq ab$$

所以面積的最大值為 289

例題 7：6

$\boxed{\text{解析}}$：利用算幾不等式可得

$$\frac{\frac{1}{x+3}+(x+3)}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x+3}\times(x+3)}=1$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{x+3}+(x+3)\geq2$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{x+3}+x+7\geq6$$

所以 $\frac{1}{x+3}+x+7$ 的最小值為 6