數學 3 進階講義

三點共線定理

成功高中．陳冠宏　老師

信望愛文教基金會

10-1-4　三點共線定理

定理敘述

➢ 三點共線定理

若 A,B,P 三點共線，則

(1)$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{AB}, t\in R$

(2)$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中$\alpha+\beta=1$

(3)$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OP}=\vec{0}$，其中$\alpha+\beta+\gamma=0$

若上述任一敘述成立，亦可推得 A,B,P 三點共線

定理證明或說明

➢ 三點共線定理

(1)由 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{AB}, t\in R$可知$\overrightarrow{\mathrm{AP}}//\overrightarrow{AB}$，故 A,B,P 三點共線。

反之，若 A,B,P 三點共線，則$\overrightarrow{\mathrm{AP}}//\overrightarrow{AB}$，故$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{AB}, t\in R$

(2)由(1)得若 A,B,P 三點共線，則$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \mathrm{t}\in\mathrm{R}$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\mathrm{t}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-\mathrm{t})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

令 1-t=α，t=β，則$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，其中$\alpha+\beta=1$

反之，已知$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，其中$\alpha+\beta=1$，將上述步驟回推，亦可得 A, B, P 三點共線

(3)由(2)得若 A,B,P 三點共線，則$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，其中$\alpha+\beta=1$

$\Rightarrow\ \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$

令-1 = γ，則$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$，其中$\alpha+\beta+\gamma=0$

反之，若已知$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$，其中$\alpha+\beta+\gamma=0$

$\Rightarrow\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$，其中$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1$

故 A,B,P 三點共線

關鍵字

三點共線

例題 1

已知 A(1,3),B(2,6),C(-1,k)，若 A,B,C 三點共線，則 k=____

Ans：-3

解：

$\overrightarrow{AB}=(1,3), \overrightarrow{AC}=(-2,k-3)$

A,B,C 三點共線⇒ $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC} \Rightarrow (1,3)=(-2t,(k-3)t)$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}, k=-3$$

例題 2

已知 A,B,P 三點共線，若$\overrightarrow{OP}=(6+t)\overrightarrow{OA}+(3-t)\overrightarrow{AB}$，則 t=_______

Ans：-5

解：$\overrightarrow{OP}=(6+t)\overrightarrow{OA}+(3-t)\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(6+t)\overrightarrow{OA}+(3-t)\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=(2t+3)\overrightarrow{OA}+(3-t)\overrightarrow{OB} \Rightarrow (2t+3)+(3-t)=1$

∴t=-5

例題 3

下列何者使 A, B, C 三點共線

(A)$\overrightarrow{OC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　(B)$\overrightarrow{OC}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

(C)$\overrightarrow{OC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(D)$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{7}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$

(E)$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

Ans：(A)(B)(E)

解：由三點共線的性質可知選(A)(B)(E)

例題 4

下列各式哪些可以確認 P 點在<u>線段</u>$\overline{AB}$上？

(1)$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$　(3) $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(4)$3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OP}=\vec{0}$　(5) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}-4\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

Ans：(1)(4)

解：設$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，若 P 點在<u>線段</u>$\overline{AB}$，則$\alpha+\beta=1$且$\alpha,\beta>0$，故選(1)(4)

例題 5

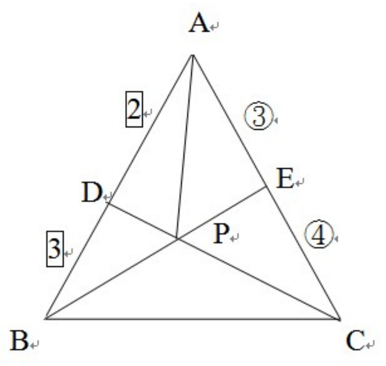
D 和 E 兩點分別在ΔABC 的$\overline{AB}$和$\overline{AC}$邊上，且$\overline{AD}$：$\overline{DB}$=2：3，$\overline{AE}$：$\overline{EC}$=3：4，$\overline{BE}$和$\overline{CD}$交於 P 點，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求數對(x,y)=________

Ans：$(\frac{8}{29},\frac{9}{29})$

解：

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}$

$=x\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}\right)+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\left(\frac{7}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



因 D-P-C 三點共線，故$\frac{5}{2}x+y=1$

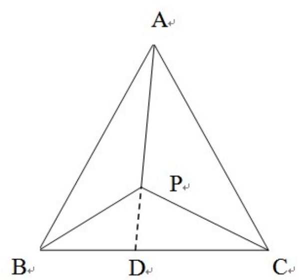
因 B-P-E 三點共線，故$x+\frac{7}{3}y=1$

解聯立得$(x,y)=(\frac{8}{29},\frac{9}{29})$

例題 6

ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，P 為 $\overline{AD}$ 上一點，若$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{19}\overrightarrow{AC}$，則 $\overline{BD}:\overline{CD}=$____________

Ans：5：3



解：如圖，設$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}=\frac{3k}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{5k}{19}\overrightarrow{AC}$

$\because$B-D-C 共線，$\therefore\frac{3k}{19}+\frac{5k}{19}=1\Rightarrow k=\frac{19}{8}$

$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overline{BD}:\overline{CD}=5:3$

溫故知新

習題 1

已知 A,B,P 三點共線，若$\overrightarrow{OP}=(6+2t)\overrightarrow{OA}+(3-t)\overrightarrow{OB}$，則 t=_______

習題 2

在△ABC 中，設 D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BD}$：$\overline{DC}=3$：2，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}$：$\overline{EC}=2$：1，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於點 P，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$ ____________

習題 3

△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 中點，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:3$，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於點 P，$\overline{CP}$ 之延長線與 $\overline{AB}$ 交於 Q 點，則

(1)若$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，則數對$(x,y)=$ ____________；

(2) $\overline{CP}$ ： $\overline{PQ}=$ ____________

習題 4

四邊形 $ABDC$，若$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}$，則

(1)△ABC：△ABD 的面積比為____________；

(2)若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於一點 O，且$\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，數對$(\alpha,\beta)=$ ____________

習題 5

A, B, C 三點不共線，$5\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}, 5\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CP}$，$\overleftrightarrow{BQ}$交 $\overline{AC}$ 於 R 點，則 $\overline{AR}$ ： $\overline{RC}=$ ____________

習題 6

A, B, C 三點不共線，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}, 3\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}$，$\overline{BQ}$ 交 $\overline{CR}$ 於 S，若$\overrightarrow{BS}=x\overrightarrow{BP}+y\overrightarrow{BR}$，則數對$(x,y)=$ ____________

習題 7 【學測 92】

設 ABC 為坐標平面上一三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，則 $\dfrac{\Delta ABP\text{ 面積}}{\Delta ABC\text{ 面積}}$ 等於

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

習題 8 【學測 93】

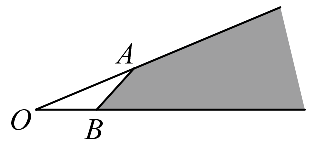
設 ΔABC 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AC}$，其中 t 為一實數。請問下列哪一選項為 t 的最大範圍，使得 P 落在 ΔABC 的內部?

習題 9 【學測 94】

如下圖所示，兩射線 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 交於 O 點，試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？

(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ (2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ (4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$



解答與解析

習題 1：-8

習題 2：$(\frac{4}{13},\frac{6}{13})$

習題 3：(1) $(\frac{3}{5},\frac{1}{5})$；(2)4：1

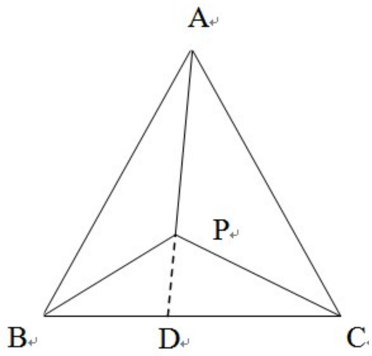
習題 4：(1)4：3；(2) $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$

習題 5：10：3

習題 6：$(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$

習題 7：(3)

解：如圖，延長$\overline{AP}$與$\overline{BC}$交於 D 點



設$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}=\frac{k}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2k}{5}\overrightarrow{AC}$

∵B-D-C 共線

$\therefore\frac{k}{5}+\frac{2k}{5}=1\Rightarrow k=\frac{5}{3}\Rightarrow\overline{AP}:\overline{AD}=3:5$

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$

故$\triangle ABP=\frac{3}{5}\triangle ABD=\frac{3}{5}(\frac{2}{3}\triangle ABC)=\frac{2}{5}\triangle ABC$

習題 8：(4)

解：當 $t\leqq 0$ 或$\frac{1}{3}+t\geqq 1$ 時，P 落在△ABC 外部或邊界上，故選(4)

習題 9：(1)(2)

解：$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，若滿足(1)x>0，y>0 (2)x+y>1 則 P 落在陰影區域