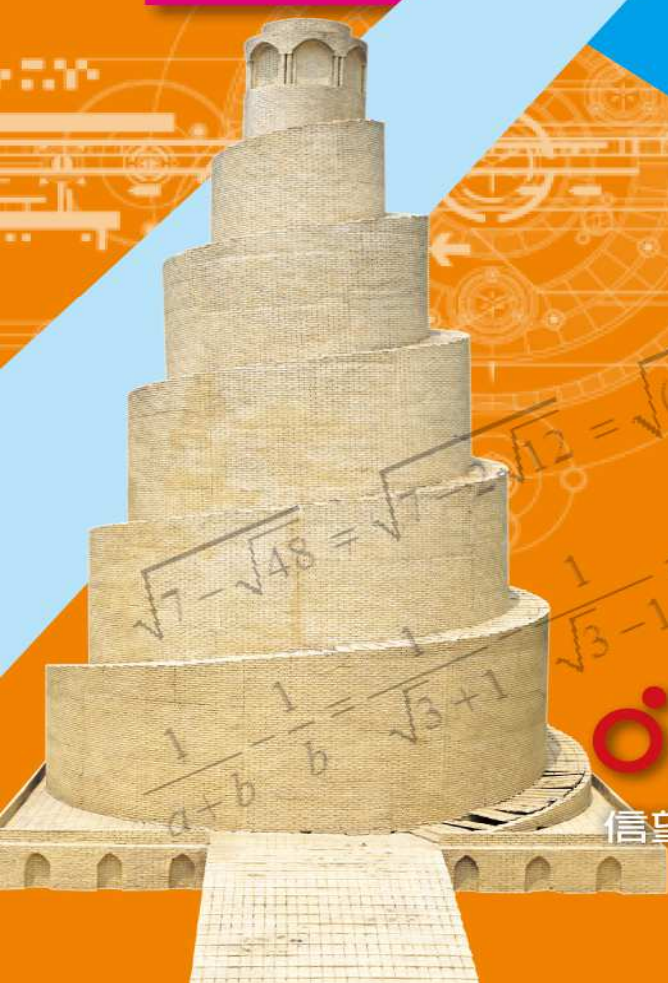


高中數學

進階
講義

橢圓

陳清海 老師



信望愛文教基金會

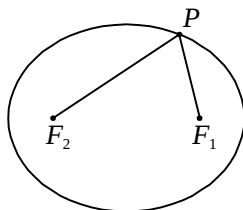


ok442 橢圓

主題一、橢圓的幾何定義

1. 橢圓的定義：

設 F_1 與 F_2 為平面上的兩相異定點，且定數 $2a$ 滿足 $2a > \overline{F_1F_2}$ 。平面上所有滿足 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ 的點 P 所形成的圖形稱為橢圓，而定點 F_1 與 F_2 稱為此橢圓的焦點



2. 橢圓的圖形要素：

(1) 中心：線段 $\overline{F_1F_2}$ 的中點 O 稱為中心， $\overline{F_1F_2}$ 的長度

習慣用 $2c$ 表示，即 $\overline{F_1F_2} = 2c$ 。

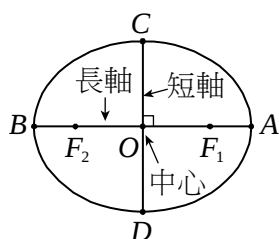
(2) 頂點：直線 F_1F_2 與橢圓的交點 A ， B 稱為頂點；

線段 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線與橢圓的交點 C ， D 也稱為頂點，

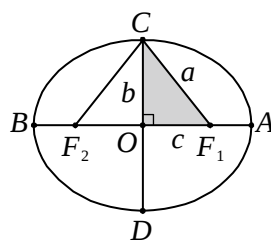
橢圓一共有 4 個頂點。

(3) 長軸：線段 $\overline{AB}$ 稱為長軸， $\overline{AB} = 2a$ 。

(4) 短軸：線段 $\overline{CD}$ 稱為短軸， $\overline{CD} = 2b$ 。



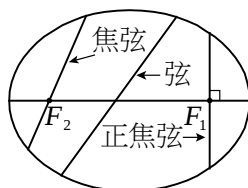
(a)



(b)

(5) 常數 a ， b 與 c 滿足 $a^2 = b^2 + c^2$ （如上圖 (b)）。

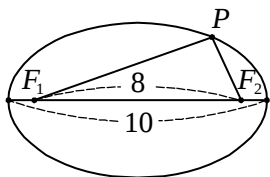
3. 在橢圓上任取兩相異點的連接線段稱為此橢圓的弦，過焦點的弦稱為焦弦。當焦弦與長軸垂直時，我們稱此焦弦為正焦弦，如右圖所示。



【例題 1】

已知 P 為橢圓 Γ 上一點， F_1, F_2 為 Γ 的兩個焦點，而且 Γ 的長軸長為 10， $\overline{F_1F_2} = 8$ ，求

- (1) $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$. (2) Γ 的短軸長 .



Ans : (1) 10 , (2) 6

【詳解】

- (1) 由橢圓的定義可知：

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ 等於長軸長，所以 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$.

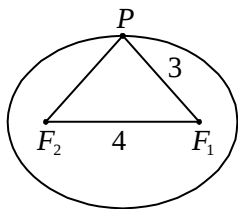
- (2) 由常數 a, b 與 c 滿足 $a^2 = b^2 + c^2$ 可得：

$$5^2 = b^2 + 4^2, \text{ 解得 } b = 3 .$$

故短軸長 $2b = 6$.

【類題 1】

下圖是一個以 F_1, F_2 為焦點的橢圓， P 為橢圓上一點．若 $\triangle PF_1F_2$ 是一個等腰三角形，且 $\overline{PF_1} = 3$ ， $\overline{F_1F_2} = 4$ ，則此橢圓的長軸長與短軸長分別為何？



Ans : 長軸長 6，短軸長 $2\sqrt{5}$

【詳解】

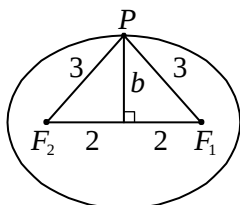
因為長軸長 $2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$,

所以長軸長 $2a = 3 + 3 = 6$ ，並得 $a = 3$ 。

由 $2c = \overline{F_1F_2} = 4$ ，得 $c = 2$ ，

再由 $a^2 = b^2 + c^2$ ，得 $3^2 = b^2 + 2^2$ ，解得 $b = \sqrt{5}$ 。

故得短軸長為 $2\sqrt{5}$ 。



【例題 2】

設橢圓 Γ 的長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ ，試證明 Γ 之正焦弦的

長為 $\frac{2b^2}{a}$ 。

【證明】

設 $\overline{PQ}$ 為通過焦點 F_1 的正焦弦，且 $\overline{PF_1} = x$ 。

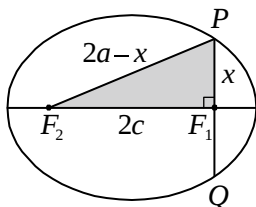
由橢圓的定義可知： $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ ，即 $\overline{PF_2} = 2a - x$ 。

因為 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形，所以利用畢氏定理，

得 $x^2 + (2c)^2 = (2a - x)^2$ ，

解得 $x = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ （因為 $a^2 = b^2 + c^2$ ），

因此正焦弦 $\overline{PQ}$ 的長為 $2x = \frac{2b^2}{a}$ 。



【類題 2】

已知橢圓 Γ 的長軸長是兩焦點距離的 2 倍，且正焦弦長為 6，求 Γ 的長軸長。

Ans : 8

【詳解】

設 Γ 的長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ ，兩焦點距離為 $2c$ 。

由題意可知 $a = 2c \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4}$ ， $\frac{2b^2}{a} = 6 \Rightarrow b^2 = 3a$ 。

將上面兩式代入 $a^2 = b^2 + c^2$ ，得 $a^2 = 3a + \frac{a^2}{4}$ ，

整理得 $3a^2 = 12a$ ，解得 $a = 4$ 。

故 Γ 的長軸長為 8。

主題二、橢圓的標準式

1. 中心在原點之橢圓的標準式:

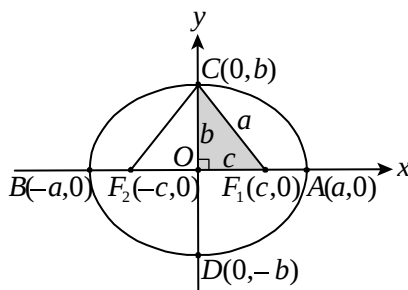
標準式

圖形

正焦弦
長

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

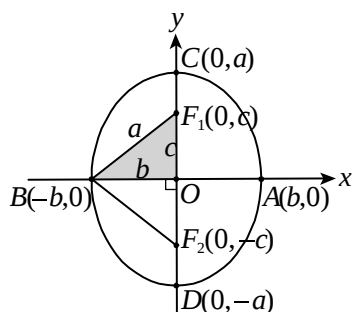
($a > b > 0$)



$$\frac{2b^2}{a}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

($a > b > 0$)



$$\frac{2b^2}{a}$$

當橢圓的長、短軸與坐標軸平行,但是中心點 (h,k) 不在原點時,
可利用平移的概念了解方程式與各要素間的關係.

2. 求橢圓標準式的三個條件:

- (1) 中心 (h,k) .
- (2) a, b (在 a, b, c 三數中 a 的值最大,且 $a^2 = b^2 + c^2$)
- (3) 形式 (左右型: a^2 的位置在 x^2 下方;上下型: a^2 的位置在 y^2 下方)

由(1)(2)(3)即可求得橢圓的標準式.

左右型

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

上下型

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

【例題 3-1】

求焦點為 $F_1(2, 0)$ 與 $F_2(-2, 0)$ ，長軸長為 8 的橢圓方程式。

Ans : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

【詳解】

因為橢圓的中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，

所以其中心為原點。

又因為 $F_1(2, 0)$ 與 $F_2(-2, 0)$ 都在 x 軸上，

所以橢圓的長軸在 x 軸上，

即橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的形式。

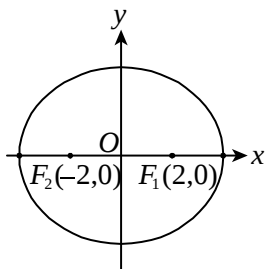
因為長軸長 $2a = 8$ ， $2c = \overline{F_1F_2} = 4$ ，

所以 $a = 4$ ， $c = 2$ ，

代入 $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得 $b = 2\sqrt{3}$ 。

將 $a = 4$ ， $b = 2\sqrt{3}$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 。

**【例題 3-2】**

求焦點為 $F_1(0, 3)$ 與 $F_2(0, -3)$ ，短軸長為 6 的橢圓方程式。

Ans : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

【詳解】

因為橢圓的中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，

所以其中心為原點。

又因為 $F_1(0, 3)$ 與 $F_2(0, -3)$ 都在 y 軸上，

所以橢圓的長軸在 y 軸上，

即橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 的形式。

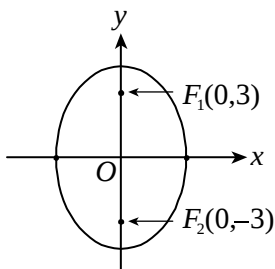
因為短軸長 $2b = 6$ ， $2c = \overline{F_1F_2} = 6$ ，

所以 $b = 3$ ， $c = 3$ ，

代入 $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得 $a = 3\sqrt{2}$ 。

將 $a = 3\sqrt{2}$ ， $b = 3$ 代入 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，

得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ 。



【類題 3-1】

求中心為 $(0, 0)$ ，一頂點為 $A(0, 3)$ ，一焦點為 $F_1(-4, 0)$ 的橢圓方程式。

Ans : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

【詳解】

如下圖所示，

可知橢圓的中心為 $(0, 0)$ ，長軸在 x 軸上，

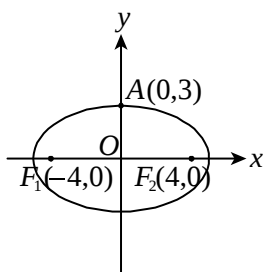
因此其標準式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的形式。

因為 $b=3$ ， $c=4$ ，所以由

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ 可得 } a = \sqrt{b^2 + c^2} = 5。$$

將 $a=5$ ， $b=3$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。



【類題 3-2】

求四頂點分別為 $(3, 0)$ ， $(-3, 0)$ ， $(0, 4)$ ， $(0, -4)$ 的橢圓方程式。

$$\text{Ans : } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

【詳解】

如下圖所示，

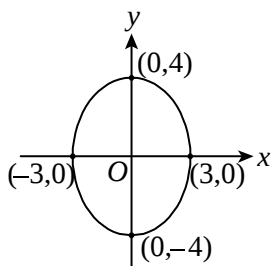
可知橢圓的中心為 $(0, 0)$ ， $a=4$ ， $b=3$ ，

而且橢圓的長軸在 y 軸上，

因此其標準式為 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 的形式。

將 $a=4$ ， $b=3$ 代入 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，

得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.



【例題 4】

求橢圓 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的頂點與焦點坐標 .

Ans : 頂點為 $(2\sqrt{5}, 0)$ 、 $(-2\sqrt{5}, 0)$ 、 $(0, 4)$ 與 $(0, -4)$ ，焦點為 $(2, 0)$ 與 $(-2, 0)$

【詳解】

將橢圓方程式改寫成 $\frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$,

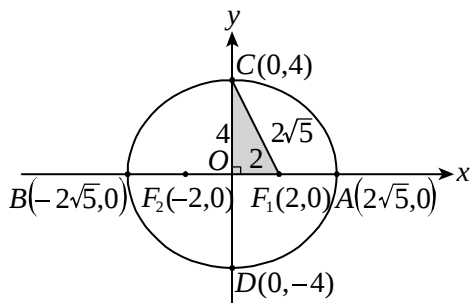
得 $a = 2\sqrt{5}$, $b = 4$,

再由 $a^2 = b^2 + c^2$ 求得 $c = 2$.

由方程式知道，橢圓的中心為原點，長軸在 x 軸上，
此橢圓的 4 個頂點分別為

$(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$, $(0, 4)$ 與 $(0, -4)$,

兩焦點為 $(2, 0)$ 與 $(-2, 0)$.



【類題 4-1】

求橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的頂點與焦點坐標。

Ans：頂點為 $(2, 0)$ 、 $(-2, 0)$ 、 $(0, 3)$ 與 $(0, -3)$ ，焦點為 $(0, \sqrt{5})$ 與 $(0, -\sqrt{5})$

【詳解】

將橢圓方程式改寫成 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ ，

得 $a = 3$ ， $b = 2$ ，

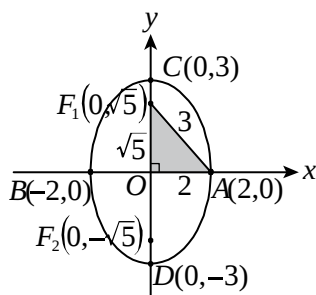
再由 $a^2 = b^2 + c^2$ 求得 $c = \sqrt{5}$ 。

由方程式知道，橢圓的中心為原點，長軸在 y 軸上，

此橢圓的 4 個頂點分別為

$(2, 0)$ ， $(-2, 0)$ ， $(0, 3)$ 與 $(0, -3)$ ，

兩焦點為 $(0, \sqrt{5})$ 與 $(0, -\sqrt{5})$ 。



【類題 4-2】

設橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的兩個焦點分別為 F_1 ， F_2 。若 Γ 上一點 P

到 F_1 的距離為 1，則點 P 到 F_2 的距離為何？

Ans：7

【詳解】

因為 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的 $a = 4$,

所以 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = 8$,

即 $1 + \overline{PF_2} = 8$, 解得 $\overline{PF_2} = 7$,

故點 P 到 F_2 的距離為 7.

【例題 5】

求兩焦點為 $F_1(2, 1)$ 與 $F_2(-4, 1)$, 長軸長為 10 的橢圓方程式.

Ans : $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

【詳解】

因為橢圓的兩焦點為 $F_1(2, 1)$ 與 $F_2(-4, 1)$,

所以其中心為 $(-1, 1)$, 且長軸平行 x 軸,

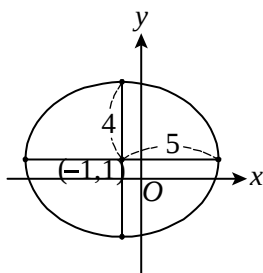
即橢圓的方程式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 的形式.

由 $2a = 10$, $2c = \overline{F_1F_2} = 6$ 及 $a^2 = b^2 + c^2$,

解得 $a = 5$, $c = 3$, $b = 4$.

將 $a = 5$, $b = 4$ 及中心 $(-1, 1)$ 代入 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$,

得橢圓的方程式為 $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.



【類題 5】

求兩頂點為 $A(3,5)$ 與 $B(3,-1)$ ，一焦點為 $F_1(3,0)$ 的橢圓方程式。

$$\text{Ans : } \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

【詳解】

因為橢圓的兩頂點為 $A(3, 5)$ 與 $B(3, -1)$ ，
所以其中心為 $(3, 2)$ ，且長軸平行 y 軸，

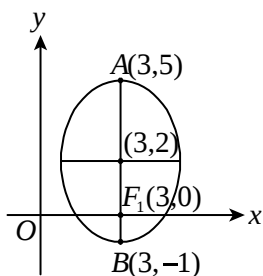
即橢圓的方程式為 $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ 的形式。

由 $a = 5 - 2 = 3$ ， $c = 2 - 0 = 2$ 及 $a^2 = b^2 + c^2$ ，
解得 $b = \sqrt{5}$ 。

將 $a = 3$ ， $b = \sqrt{5}$ 及中心 $(3, 2)$ 代入

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

得橢圓的方程式為 $\frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ 。

**【例題 6】**

求橢圓 $5x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0$ 的頂點與焦點坐標。

Ans : 頂點為 $(-3, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(-2, \sqrt{5})$ 與 $(-2, -\sqrt{5})$ ，焦點為 $(-2, 2)$ 與 $(-2, -2)$

【詳解】

將 $5x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0$ 配方得

$$5(x+2)^2 + y^2 = 5,$$

再將等號的兩邊同除以 5,

$$\text{改寫成 } \frac{(x+2)^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$$

因為 $\sqrt{5} > 1$, 所以 $a = \sqrt{5}$, $b = 1$,

再由 $a^2 = b^2 + c^2$, 求得 $c = 2$.

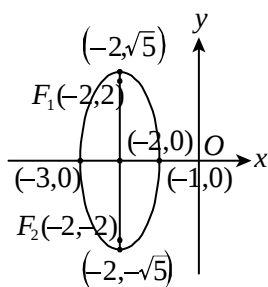
由方程式知道:

橢圓的中心為 $(-2, 0)$, 長軸與 y 軸平行,

因此橢圓的頂點分別為

$(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(-2, \sqrt{5})$ 與 $(-2, -\sqrt{5})$,

且焦點為 $(-2, 2)$ 與 $(-2, -2)$.



【類題 6】

求橢圓 $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 11 = 0$ 的頂點與焦點坐標.

Ans: 頂點為 $(5, -1)$ 、 $(-3, -1)$ 、 $(1, 1)$ 與 $(1, -3)$, 焦點為 $(1 + 2\sqrt{3}, -1)$ 與 $(1 - 2\sqrt{3}, -1)$

【詳解】

將 $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 11 = 0$

配方得 $(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 16$,

再將等號的兩邊同除以 16,

改寫成 $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$.

因為 $4 > 2$ ，所以 $a = 4$ ， $b = 2$ ，

再由 $a^2 = b^2 + c^2$ ，求得 $c = 2\sqrt{3}$.

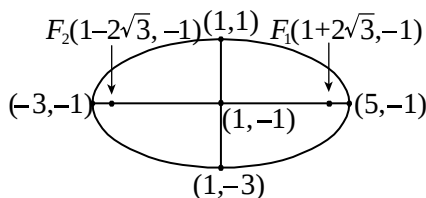
由方程式知道：

橢圓的中心為 $(1, -1)$ ，長軸與 x 軸平行，

因此橢圓的頂點分別為

$(5, -1)$ ， $(-3, -1)$ ， $(1, 1)$ 與 $(1, -3)$ ，

且焦點為 $(1+2\sqrt{3}, -1)$ 與 $(1-2\sqrt{3}, -1)$.



【例題 7】

已知橢圓 Γ 的長軸長為 6，且與橢圓 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 有相同的焦

點。求

(1) Γ 的焦點坐標。

(2) Γ 的方程式。

Ans： (1) $(0, 2)$ 與 $(0, -2)$ ，(2) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

【詳解】

(1) 由方程式 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 可知：

橢圓的中心 $(0, 0)$ ，長軸在 y 軸上，

且 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$ ，

因此其焦點為 $(0, 2)$ 與 $(0, -2)$ 。

因為 Γ 和橢圓 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 有相同的焦點，

所以其焦點坐標為 $(0, 2)$ 與 $(0, -2)$ 。

(2) 因為 Γ 的中心為 $(0, 0)$ ，長軸在 y 軸上，

所以其方程式為 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 的形式。

由長軸長 $2a = 6$ ，可得 $a = 3$ ，又 $c = 2$ ，

代入 $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得 $b = \sqrt{5}$ 。

將 $a = 3$ ， $b = \sqrt{5}$ 代入 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，

得 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

【類題 7】

已知橢圓 Γ 通過點 $P(-3, 8)$ ，且與橢圓 $\frac{x^2}{23} + \frac{y^2}{14} = 1$ 有相同的焦點。求

(1) Γ 的焦點坐標。

(2) Γ 的長軸長。

Ans：(1) $(3, 0)$ 與 $(-3, 0)$ ，(2) 18

【詳解】

(1) 由方程式 $\frac{x^2}{23} + \frac{y^2}{14} = 1$ 可知：

橢圓的中心 $(0, 0)$ ，長軸在 x 軸上，

且 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{23 - 14} = 3$ ，

因此其焦點為 $(3, 0)$ 與 $(-3, 0)$ 。

因為 Γ 和橢圓 $\frac{x^2}{23} + \frac{y^2}{14} = 1$ 有相同的焦點，

所以其焦點坐標為 $(3, 0)$ 與 $(-3, 0)$ 。

(2) 因為橢圓 Γ 通過點 $P(-3, 8)$ ，所以長軸長為

$$\begin{aligned} 2a &= \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \\ &= \sqrt{(-3-3)^2 + (8-0)^2} + \sqrt{(-3-(-3))^2 + (8-0)^2} \\ &= 10 + 8 \\ &= 18 . \end{aligned}$$

【例題 8】

已知一彗星繞太陽的軌道是以太陽為焦點的橢圓，橢圓長軸的兩頂點中，距離太陽最近的點稱為近日點，距離太陽最遠的點稱為遠日點，此彗星軌道上之近日點與遠日點和太陽的距離比是 1:25。求橢圓軌道之長軸與短軸的長度比。

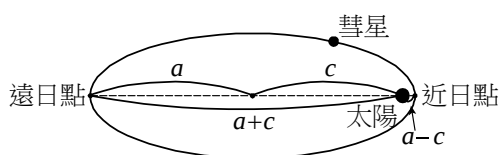
Ans : 13 : 5

【詳解】

設長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ ，兩焦點的距離為 $2c$ 。

由下圖可知：近日點到太陽的距離為 $a - c$ ，

遠日點到太陽的距離為 $a + c$ 。



因此 $\frac{a-c}{a+c} = \frac{1}{25}$ ，解得 $a = \frac{13}{12}c$ 。

由 $a^2 = b^2 + c^2$ ，得 $b^2 = a^2 - c^2$ ，

$$b^2 = \left(\frac{13}{12}c\right)^2 - c^2 = \frac{25}{144}c^2, \text{ 即 } b = \frac{5}{12}c .$$

故長軸與短軸的長度比為 $\frac{13}{12}c : \frac{5}{12}c = 13:5$ 。

【類題 8】

一彗星繞太陽運行的軌跡為一個橢圓，若其遠日點到太陽之距離恰好為橢圓之短軸長的 3 倍，則橢圓之短軸長是其近日點到太陽之距離的多少倍？

Ans：12 倍

【詳解】

設長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ ，兩焦點的距離為 $2c$ 。

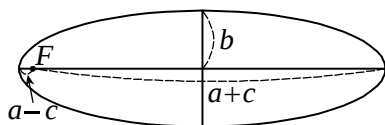
因為遠日點到太陽的距離為 $a+c$ ，所以 $\frac{a+c}{2b}=3$ ，

即 $a+c=6b$ 。又因為近日點到太陽之距離為 $a-c$ ，

且 $b^2=a^2-c^2=(a+c)(a-c)$ ，

所以 $b^2=6b(a-c)$ ，整理得 $\frac{2b}{a-c}=12$ ，

因此短軸長是其近日點到太陽之距離的 12 倍。

**【例題 9】**

已知 $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=8$ 的圖形是一個橢

圓，求此橢圓的中心、焦點坐標與長軸、短軸的長。

**Ans：中心為 $(0, -1)$ ，焦點為 $(2, -1)$ 與 $(-2, -1)$ ，長軸長為 8，
短軸長為 $4\sqrt{3}$**

【詳解】

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=8$ 的意思是：

動點 $P(x, y)$ 到兩定點

$F_1(2, -1)$ 與 $F_2(-2, -1)$ 的距離和為 8，
 因此其圖形為以 F_1 與 F_2 為焦點的橢圓，且長軸長為 8。
 因為中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，所以中心為
 $(0, -1)$ ， $2c=4$ ， $2a=8$ ，得 $a=4$ ， $c=2$ ，
 並由 $a^2=b^2+c^2$ 可得 $b=2\sqrt{3}$ ，即 $2b=4\sqrt{3}$ 。
 由上面的討論可得：
 中心為 $(0, -1)$ ，焦點為 $(2, -1)$ 與 $(-2, -1)$ ，
 長軸長為 8，短軸長為 $4\sqrt{3}$ 。

【類題 9】

已知 $\sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y+6)^2} = 10$ 的圖形是一個橢圓，

關於此橢圓，選出正確的選項：

- (1) 中心為 $(4, -3)$ ，(2) $(4, 0)$ 為其焦點，(3) 短軸長為 8，
 (4) 長軸在 $y=-3$ 上。

Ans：(1)(2)(3)

【詳解】

$\sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y+6)^2} = 10$ 的意思是：

動點 $P(x, y)$ 到兩定點

$F_1(4, 0)$ 與 $F_2(4, -6)$ 的距離和為 10，

因此其圖形為以 F_1 與 F_2 為焦點的橢圓，

且長軸長為 10。

因為中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，所以中心為

$(4, -3)$ ， $2c=6$ ， $2a=10$ ，得 $a=5$ ， $c=3$ ，

並由 $a^2=b^2+c^2$ 可得 $b=4$ ，即 $2b=8$ 。

由上面的討論可得：

中心為 $(4, -3)$ ，焦點為 $(4, 0)$ 與 $(4, -6)$ ，

短軸長為 8，長軸在直線 $x=4$ 上。

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(3)。

【例題 10】

已知方程式 $\frac{x^2}{2k-3} + \frac{y^2}{k+5} = 1$ 的圖形是長軸在 y 軸上的橢圓，求 k 的範圍。

Ans : $\frac{3}{2} < k < 8$

【詳解】

因為橢圓 $\frac{x^2}{2k-3} + \frac{y^2}{k+5} = 1$ 的長軸在 y 軸上，

所以 $a^2 = k+5$ ， $b^2 = 2k-3$ ，且

$k+5 > 2k-3 > 0$ ，解得 $\frac{3}{2} < k < 8$ 。

故 k 的範圍為 $\frac{3}{2} < k < 8$ 。

【類題 10】

已知方程式 $\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{4-k^2} = 1$ 的圖形是短軸在 y 軸上的橢圓，求 k 的範圍。

Ans : $1 < k < 2$

【詳解】

因為橢圓 $\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{4-k^2} = 1$ 的短軸在 y 軸上，

所以 $a^2 = k+2$ ， $b^2 = 4-k^2$ ，且

$k+2 > 4-k^2 > 0$ ，解得 $1 < k < 2$ 。

故 k 的範圍為 $1 < k < 2$ 。

主題三、軌跡方程式

設動點的坐標為 (x, y) ，由題意找出 x, y 的關係式，即為動點所成圖形的方程式(或稱為動點的軌跡方程式)。

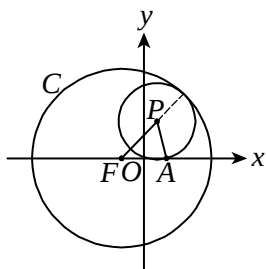
【例題 11】

求通過定點 $A(1, 0)$ ，且與圓 $C: (x+1)^2 + y^2 = 16$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式。

Ans : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 F 為 $(-1, 0)$ ，半徑為 4。
 假設通過定點 A ，且與圓 C 相切之所有圓之圓心 P 的坐標為 (x, y) ，半徑為 r 。



如上圖所示，因為點 A 在圓 C 內部，
 所以滿足題意的圓與圓 C 內切，

並得 $\overline{PF} = 4 - r$. ①

因為滿足題意的圓通過點 A ，所以 $\overline{PA} = r$. ②

將①②兩式相加，得

$$\overline{PF} + \overline{PA} = 4 - r + r = 4,$$

即 P 點到 A, F 兩點的距離和為 4。

因此 P 點在以 A, F 兩點為焦點，

且長軸長為 4 的橢圓上。

橢圓的中心為 $\overline{AF}$ 的中點 $(0, 0)$ ，

且 $2a = 4$ ， $2c = \overline{AF} = 2$ ，即 $a = 2$ ， $c = 1$ ，

又 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ 。

由橢圓的標準式，得 P 點的軌跡方程式為

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1, \text{ 即 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

【類題 11】

求通過定點 $A(0, 3)$ ，且與圓 $C: x^2 + (y+1)^2 = 25$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式。

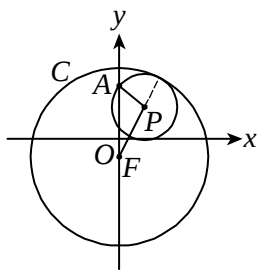
$$\text{Ans: } \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 F 為 $(0, -1)$ ，半徑為 5。

假設通過定點 A ，且與圓 C 相切之所有圓之圓心

P 的坐標為 (x, y) ，半徑為 r 。



如上圖所示，因為點 A 在圓 C 內部，

所以滿足題意的圓與圓 C 內切，

並得 $\overline{PF} = 5 - r$. ①

因為滿足題意的圓通過點 A ，所以 $\overline{PA} = r$. ②

將①②兩式相加，得 $\overline{PF} + \overline{PA} = 5 - r + r = 5$ ，

即 P 點到 A, F 兩點的距離和為 5。

因此 P 點在以 A, F 兩點為焦點，

且長軸長為 5 的橢圓上。

橢圓的中心為 $\overline{AF}$ 的中點 $(0, 1)$ ，且

$$2a = 5, \quad 2c = \overline{AF} = 4, \quad \text{即 } a = \frac{5}{2}, \quad c = 2,$$

$$\text{又 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{3}{2} .$$

由橢圓的標準式，得 P 點的軌跡方程式為

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1, \text{ 即 } \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{25}{4}} = 1 .$$

【例題 12】

在坐標平面上，已知到直線 $x = -1$ 之距離是到點 $F(1, 0)$ 之距離的兩倍之所有點所形成之圖形是一個橢圓，其中 $F(1, 0)$ 為此橢圓的一個焦點，求另一個焦點的坐標。

$$\text{Ans : } \left(\frac{7}{3}, 0\right)$$

【詳解】

假設點 $P(x, y)$ 滿足

到直線 $x = -1$ 之距離是到點 $F(1, 0)$ 之距離的兩倍，
則點 P 到直線 $x = -1$ 的距離為 $|x + 1|$ ，

點 P 到點 F 的距離為 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$ 。

由題意可列得： $|x + 1| = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$ 。

將此式兩邊平方，得

$$(x + 1)^2 = 4(x - 1)^2 + 4y^2,$$

整理得 $3x^2 - 10x + 4y^2 + 3 = 0$ ，

分別對 x, y 配方，得

$$3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{16}{3}, \text{ 即 } \frac{\left(x - \frac{5}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1 .$$

由橢圓的標準式，得知橢圓為左右型，

其中心為 $(\frac{5}{3}, 0)$ ， $a = \frac{4}{3}$ ， $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

由 $a^2 = b^2 + c^2$ 得知 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{3}} = \frac{2}{3}$ 。

故兩焦點的坐標為 $(\frac{5}{3} \pm \frac{2}{3}, 0) = (1, 0)$ 或 $(\frac{7}{3}, 0)$ 。

【類題 12】

在坐標平面上，已知到直線 $y=0$ 之距離是到點 $F(0, 2)$ 之距離的兩倍之所有點所形成之圖形是一個橢圓，求此橢圓的方程式、中心坐標與長軸長。

Ans：方程式 $\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(y - \frac{8}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1$ ，中心 $(0, \frac{8}{3})$ ，長軸長 $\frac{8}{3}$

【詳解】

設 $P(x, y)$ 為橢圓上的點。

由題意可列得：

$$|y| = 2\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}。$$

將此式兩邊平方，得

$$y^2 = 4(x^2 + (y-2)^2)，整理得$$

$$4x^2 + 3y^2 - 16y + 16 = 0，$$

$$再將 4x^2 + 3y^2 - 16y + 16 = 0$$

$$配方整理得 \frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(y - \frac{8}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1。$$

由方程式 $\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(y-\frac{8}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1$ 可知其中心為 $(0, \frac{8}{3})$,

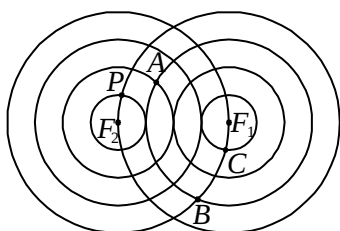
又因為 $\frac{16}{9} > \frac{4}{3}$, 所以 $a^2 = \frac{16}{9}$,

解得 $a = \frac{4}{3}$, 因此長軸長為 $2a = \frac{8}{3}$.

重要精選考題

基礎題

1. 下圖是以 F_1, F_2 為圓心的兩組同心圓，各組 4 個同心圓的半徑分別為 1, 2, 3, 4，且 $\overline{F_1F_2}=4$ 。現有一橢圓 Γ 以 F_1, F_2 為焦點，且通過 P 點，選出正確的選項：
- (1) Γ 通過 A 點，(2) Γ 通過 B 點，(3) Γ 通過 C 點，
- (4) Γ 的長軸長為 5，(5) Γ 的正焦弦長為 $\frac{3}{2}$ 。



Ans : (1)(3)(4)

【詳解】

根據橢圓的定義得知，

橢圓上任一點到兩焦點的距離和為定值 $2a$ 。

因為 P 為橢圓 Γ 上一點，且 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 5$ ，所以 $2a = 5$ 。

(1) 因為 $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 3 + 2 = 5$ ，所以 Γ 通過 A 點。

(2) 因為 $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 3 + 4 = 7$ ，所以 Γ 不通過 B 點。

(3) 因為 $\overline{CF_1} + \overline{CF_2} = 1 + 4 = 5$ ，所以 Γ 通過 C 點。

(4) Γ 的長軸長為 $2a = 5$ 。

(5) 因為 $2c = \overline{F_1F_2} = 4$ ，所以 $c = 2$ 。

由 $a^2 = b^2 + c^2$ 可得 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{3}{2}$ 。

$$\text{故正焦弦長 } \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{5}.$$

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(3)(4)。

2. 已知一橢圓的長軸平行於 x 軸，中心為 $(1, 2)$ 且通過點 $(4, 6)$ ，求下列哪些點會在這橢圓上？

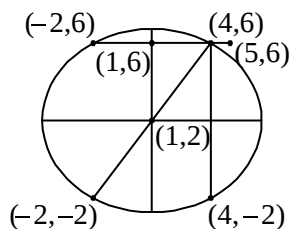
(1) $(-2, -2)$ ，(2) $(-2, 6)$ ，(3) $(4, -2)$ ，(4) $(5, 6)$ ，

(5) $(1, 6)$ 。

Ans：(1)(2)(3)

【詳解】

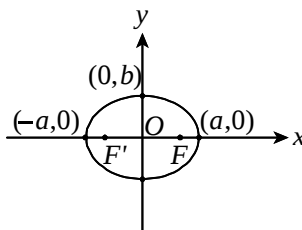
橢圓的圖形大致如下圖：



由橢圓的對稱性可知：

正確的選項為(1)(2)(3)。

3. 設一橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a > b > 0$ ， F 為它的一個焦點。已知此橢圓在 x 軸上的兩個頂點與 F 的距離分別為 5 單位及 1 單位，如右圖所示。求 a ， b 的值。 【91 指乙】



Ans : $a=3$, $b=\sqrt{5}$

【詳解】

設 F 點為 $(c, 0)$ ，則由 $\begin{cases} a-c=1 \\ a+c=5 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=3 \\ c=2 \end{cases}$

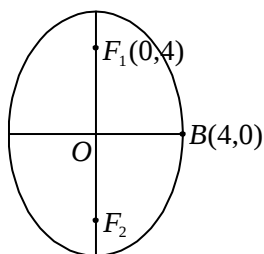
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} .$$

4-1. 已知橢圓的一個焦點為 $F_1(0,4)$ ，長軸平行 y 軸，且短軸的一個頂點為 $B(4,0)$ ，求此橢圓的方程式。

Ans : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$

【詳解】

因為長軸平行 y 軸，所以橢圓為上下型，如下圖所示。



由上圖可知：

橢圓中心的坐標為 $(0, 0)$ ，

$$c = \overline{OF_1} = 4, \quad b = \overline{OB} = 4, \quad \text{且 } a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} .$$

由橢圓的標準式可得其方程式為

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1, \quad \text{即 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1 .$$

- 4-2. 已知橢圓的中心在(1,1)，焦點在直線 $y=1$ 上，長軸長為短軸長的 3 倍，且通過點(4,0)，求此橢圓的方程式。

Ans : $\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

【詳解】

假設橢圓的長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ 。

根據題意得知： $2a = 3 \cdot 2b$ ，即 $a = 3b$ 。

因為焦點在直線 $y = 1$ 上，所以橢圓為左右型。

由橢圓的標準式可得其方程式為 $\frac{(x-1)^2}{(3b)^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$ 。

因為點(4,0)在橢圓上，將其代入上式，

得 $\frac{(4-1)^2}{(3b)^2} + \frac{(0-1)^2}{b^2} = 1$ ，整理得 $\frac{9}{9b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ，

解得 $b = \sqrt{2}$ ，且 $a = 3b = 3\sqrt{2}$ 。

故橢圓的方程式為 $\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ 。

5. 令橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 、 $\Gamma_2: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2$ 、 $\Gamma_3: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5}$ 的長軸長分別為 l_1 、 l_2 、 l_3 。請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $l_1 = l_2 = l_3$. (2) $l_1 = l_2 < l_3$. (3) $l_1 < l_2 < l_3$.

(4) $l_1 = l_3 < l_2$. (5) $l_1 < l_3 < l_2$.

【99 學測】

Ans : (4)

【詳解】

$\Gamma_1: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow k_1 = 10$ ，

$\Gamma_2: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1 \Rightarrow k_2 = 10\sqrt{2}$ ，

$$\Gamma_3: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{x^2 - 10x}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow k_3 = 10,$$

故得 $k_1 = k_3 < k_2$ 。

6. 坐標平面上兩點 $B(4,1)$, $C(-2,1)$, 已知所有滿足 $\triangle ABC$ 的周長為 20 的 A 點均落在橢圓 Γ 上, 求橢圓 Γ 的長軸長。

Ans : 14

【詳解】

利用兩點間距離公式得知：

$$\overline{BC} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - 1)^2} = 6.$$

由題意知 $\triangle ABC$ 的周長為 20, 即

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AB} + 6 + \overline{CA} = 20, \text{ 得 } \overline{AB} + \overline{CA} = 14.$$

因此, B, C 兩點為橢圓 Γ 的兩焦點, 且 $2a = 14$ 。

故長軸長為 $2a = 14$ 。

7. 已知橢圓 $\frac{x^2}{k^2+1} + \frac{y^2}{2-k} = 1$ 與橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有共同的焦點, 求實數 k 的值。

Ans : -3

【詳解】

因為兩個橢圓共焦點,

所以兩個橢圓都是左右型且 c 的值相等。

因此, 由 $c^2 = a^2 - b^2$, 得

$$(k^2 + 1) - (2 - k) = 9 - 4,$$

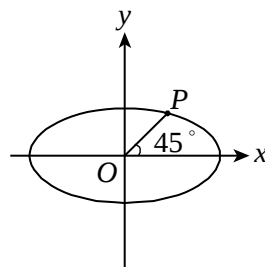
整理得 $k^2 + k - 6 = 0$ ，解得 $k = 2$ 或 -3 。

因為方程式 $\frac{x^2}{k^2+1} + \frac{y^2}{2-k} = 1$ 的圖形為橢圓，

所以分母不得為 0，即 $k \neq 2$ 。

故實數 k 的值為 -3 。

8. 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如右圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45° 的直線在第一象限跟橢圓相交於 P 點，則此交點 P 與中心 O 的距離為



- (1) 1.5 . (2) $\sqrt{1.6}$. (3) $\sqrt{2}$.
(4) $\sqrt{2.5}$. (5) $\sqrt{3.2}$. 【91 學測】

Ans : (2)

【詳解】

$\overline{OP}$ 斜角 45° ，故 P 點坐標可設成 $(t, t) (t > 0)$ 。

又 P 在 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 上，故 $\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{1} = 1 (t > 0)$ 。

解得 $t = \sqrt{\frac{4}{5}}$ ， $\overline{OP} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{1.6}$ 。

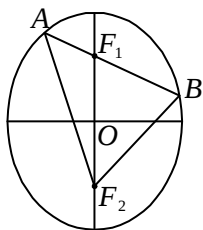
進階題

9. 已知橢圓的兩焦點分別為 $F_1(0, 3)$ 與 $F_2(0, -3)$ ，弦 $\overline{AB}$ 通過焦點 F_1 ，且 $\triangle ABF_2$ 的周長為 20，求此橢圓的方程式。

Ans : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

【詳解】

如下圖所示．



假設橢圓上任一點到兩焦點的距離和為 $2a$ ．

因此， $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 2a$ ．

並得 $\triangle ABF_2$ 的周長

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BF_2} + \overline{F_2A} &= \overline{AF_1} + \overline{F_1B} + \overline{BF_2} + \overline{F_2A} \\ &= (\overline{AF_1} + \overline{F_2A}) + (\overline{F_1B} + \overline{BF_2}) = 4a .\end{aligned}$$

由題意可知 $\triangle ABF_2$ 的周長為 20，

即 $4a = 20$ ，解得 $a = 5$ ．

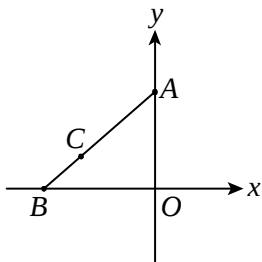
又由兩焦點可得 $2c = 3 - (-3) = 6$ ，解得 $c = 3$ ．

再由 $a^2 = b^2 + c^2$ 解得 $b = 4$ ．

因為橢圓的中心為 $(0, 0)$ ， $a = 5$ ， $b = 4$ ，

所以其方程式為 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ．

10. 如下圖所示，線段 $\overline{AB}$ 的長度為 6，且 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 1$ ．保持點 A 在 y 軸上，上下移動，且點 B 在 x 軸上左右移動時，點 C 所經過的路徑會形成一圖形．求此圖形的方程式．



Ans : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

【詳解】

設 A 點坐標為 $(0, a)$, B 點坐標為 $(b, 0)$, C 點坐標為 (x, y) .

因為線段 $\overline{AB}$ 的長度為 6, 所以 $\sqrt{(0-b)^2 + (a-0)^2} = 6$,

兩邊平方得 $a^2 + b^2 = 36$. ①

又因為 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2:1$, 所以 $(x, y) = (\frac{2b}{2+1}, \frac{a}{2+1})$,

整理得 $\begin{cases} b = \frac{3}{2}x \\ a = 3y \end{cases}$. ②

將②式代入①式, 得 $(3y)^2 + (\frac{3}{2}x)^2 = 36$,

整理得 $\frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = 36$.

故此圖形的方程式為 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

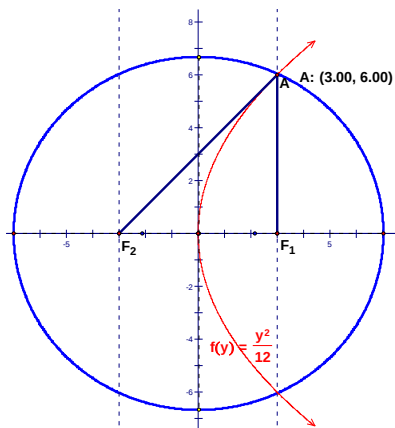
11. 設 $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > 0$) 為焦點在 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ 的橢圓;

E_2 為焦點在 $(3, 0)$ 且準線為 $x = -3$ 的拋物線. 已知 E_1 , E_2 的

交點在直線 $x = 3$ 上, 求 a 的值. 【100 學測】

Ans : $3 + 3\sqrt{2}$

【詳解】



如上圖， $E_2: y^2 = 12x$ ，

設 $F_1(3, 0)$ ， $F_2(-3, 0)$ 。

因 E_1 與 E_2 的交點在直線 $x=3$ 上，

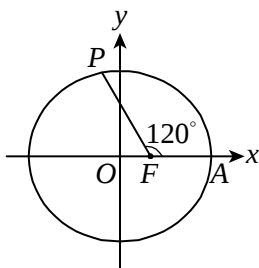
故交點為 $A(3, 6)$ 與 $B(3, -6)$ 。

$$2a = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 6 + \sqrt{(3+3)^2 + (6-0)^2} = 6 + 6\sqrt{2}，$$

$$\text{故 } a = 3 + 3\sqrt{2}。$$

12. 設 F ， A 分別為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ （其中 $a > b > 0$ ）的焦點與頂點．

如下圖所示，若點 P 在橢圓上， $\overline{PF} = 8$ ， $\overline{FA} = 5$ ， $\angle PFA = 120^\circ$ ，則橢圓的正焦弦長為何？



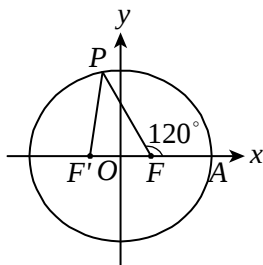
Ans : $\frac{40}{3}$

【詳解】

設 Γ 的另一個焦點為 F' 。

由下圖可知：

$\overline{FA} = a - c = 5$ ，即 $a = 5 + c$ ，且 $\overline{FF'} = 2c$ 。



因為 P 為橢圓 Γ 上一點，所以 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ ，
並推得 $\overline{PF'} = 2a - \overline{PF} = 2a - 8 = 2(5 + c) - 8 = 2c + 2$ 。

在 $\triangle PFF'$ 中， $\angle PFF' = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，
利用餘弦定理可得

$$\overline{PF'}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FF'}^2 - 2 \cdot \overline{PF} \cdot \overline{FF'} \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } (2c + 2)^2 = 8^2 + (2c)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 2c \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{整理得 } 4c^2 + 8c + 4 = 4c^2 - 16c + 64,$$

$$\text{解得 } c = \frac{5}{2}, \text{ 並得 } a = c + 5 = \frac{15}{2}.$$

$$\text{由 } a^2 = b^2 + c^2 \text{ 可得 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{故橢圓的正焦弦長為 } \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot (5\sqrt{2})^2}{\frac{15}{2}} = \frac{40}{3}.$$

13. 小明家正東邊 210 步處是牛棚，另外有相距 110 步的兩口井，離家比較近的井是在另一井的正西方。小明發現，無論從家到哪一口井取水，然後至牛棚的總距離都是 330 步。試問：小明家與最近的那一口井距離多少步？

Ans : 130 步

【詳解】

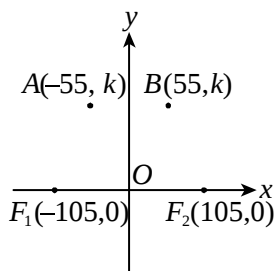
設小明的家坐標為 $F_1(-105, 0)$,

牛棚的坐標為 $F_2(105, 0)$,

並設離家較近之井 A 的坐標為 $(-55, k)$,

較遠之井 B 的坐標為 $(55, k)$, $k > 0$,

如下圖所示 .



由題意可知： $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 330$,

即 A, B 兩點在以 F_1, F_2 為焦點的橢圓上,

且長軸長為 330, 因此可得 $a = 165$, $c = 105$.

由 $a^2 = b^2 + c^2$ 得 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 90\sqrt{2}$,

並得橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{165^2} + \frac{y^2}{(90\sqrt{2})^2} = 1$.

因為井 A 在橢圓上,

所以將 A 點坐標 $(-55, k)$ 代入橢圓方程式,

$$\text{得 } \frac{55^2}{165^2} + \frac{k^2}{(90\sqrt{2})^2} = 1,$$

整理得 $k^2 = 14400$, 解得 $k = 120$.

故小明家與井 A 的距離為

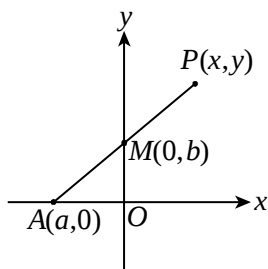
$$\sqrt{(-105 - (-55))^2 + (0 - 120)^2} = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ (步)} .$$

14. 設線段 $\overline{AP}$ 的長度為 6，現在保持點 A 在 x 軸上，左右移動，且 $\overline{AP}$ 的中點在 y 軸上，上下移動，求點 P 所經過之路徑所形成圖形的方程式。

Ans : $4x^2 + y^2 = 36$

【詳解】

設 A 點坐標為 $(a, 0)$ ， $\overline{AP}$ 的中點 M 坐標為 $(0, b)$ ， P 點坐標為 (x, y) 。



因為線段 $\overline{AP}$ 的長度為 6，即 $\overline{AM} = 3$ ，

所以 $\sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = 3$ ，

兩邊平方得 $a^2 + b^2 = 9$. ①

又因為 M 為 $\overline{AP}$ 的中點，所以

$$(0, b) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{0+y}{2} \right), \text{ 即 } \begin{cases} a = -x \\ b = \frac{1}{2}y \end{cases} . \quad ②$$

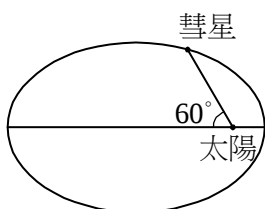
將②式代入①式，得 $(-x)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 9$ ，

即 $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 9$ 或 $4x^2 + y^2 = 36$.

故點 P 所經過之路徑所形成圖形的方程式為

$4x^2 + y^2 = 36$.

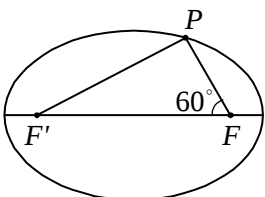
15. 已知一彗星繞太陽運轉的軌跡是以太陽為焦點的橢圓，此彗星與太陽最近的距離為 100AU ，最遠的距離為 700AU 。如下圖所示，求當彗星與太陽的連線與橢圓長軸成 60° 夾角時，彗星與太陽的距離是多少 AU 。
(AU ：地球與太陽的平均距離)



Ans : 280 AU

【詳解】

假設彗星位置為 P 點，
太陽為橢圓的一個焦點 F ，另一焦點為 F' ，
如下圖所示。



因為橢圓的長軸長 $2a = 700 + 100 = 800$ ，

所以根據橢圓的定義，得 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 800$ 。

又因為橢圓對短軸對稱，所以兩焦點間的距離

$$\overline{FF'} = 700 - 100 = 600。$$

在 $\triangle PFF'$ 中，利用餘弦定理可得

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{PF}^2 + \overline{FF'}^2 - \overline{PF'}^2}{2 \cdot \overline{PF} \cdot \overline{FF'}}。$$

設 $\overline{PF} = x$ ($x > 0$)。

$$\text{則 } \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 600^2 - (800 - x)^2}{2 \cdot x \cdot 600},$$

$$\text{展開得 } \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 360000 - (x^2 - 1600x + 640000)}{1200x},$$

整理得 $600x = 1600x - 280000$ ，解得 $x = 280$ 。

故彗星與太陽的距離為 280AU。

16. 設 m, n 為正實數，橢圓 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 的焦點分別為 $F_1(0, 2)$ 與 $F_2(0, -2)$ 。若此橢圓上有一點 P 使得 $\triangle PF_1F_2$ 為一正三角形，則 $m = \underline{28} \underline{29}$ ， $n = \underline{30} \underline{31}$ 。(101 學測)

Ans : (28) 1, (29) 2, (30) 1, (31) 6

【詳解】

$\because \triangle PF_1F_2$ 為正三角形

$\therefore \overline{PF_1} = \overline{PF_2}$ ， P 點在 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線上，
設 $P(x, 0)$

$\because \triangle PF_1F_2$ 為正三角形 $\therefore$

$$\overline{PF_1} = \overline{F_1F_2} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 4 \Rightarrow x^2 = 12, \text{ 得 } x = \sqrt{12}$$

或 $-\sqrt{12}$

$$\therefore c = 2, b = \sqrt{12}, a^2 = 12 + 4 = 16$$

$$\Rightarrow m = b^2 = 12, n = a^2 = 16$$

