



B6 1-2 二次函數的最大值或最小值



概念 ① 二次函數的最小值與最低點



☆已知二次函數 $y=x^2$

1. 請完成下列表格

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y											

① x 的值從 $\dots -4, -3, -2, -1, 0$

y 的值會慢慢_____。

② x 的值從 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

y 的值會慢慢_____。

☆發現

二次函數 $y=x^2$

y 有_____值此時 $x=$ _____

☆觀察 $y=x^2$ 的圖形

① 當 x 坐標從 $\dots -4, -3, -2, -1, \dots$

y 坐標會慢慢_____。

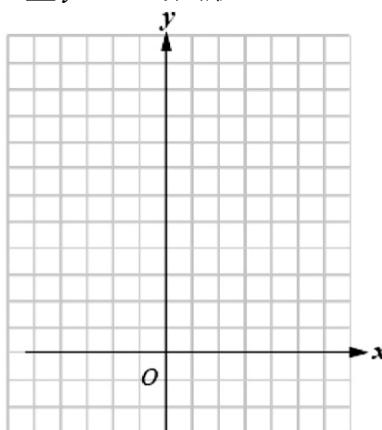
就是會慢慢_____。

② 當 x 坐標從 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

y 坐標會慢慢_____。

就是會慢慢_____。

2. 畫 $y=x^2$ 的圖形



☆發現

$y=x^2$ 的圖形是_____

開口向____，有最_____點

y 有_____值_____

此時 $x=$ _____

★筆記

1. 二次函數的最大值或最小值指的是_____值。

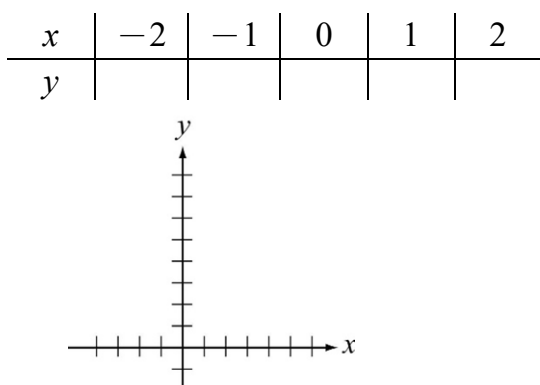
2. 二次函數 $y=x^2$ 的圖形開口向____，有最_____點
 y 有最_____值_____
此時 $x=$ _____

3. 最高（低）點就是_____點。



牛刀小試 1

1. 請在坐標平面上畫出二次函數 $y=2x^2$ 圖形。



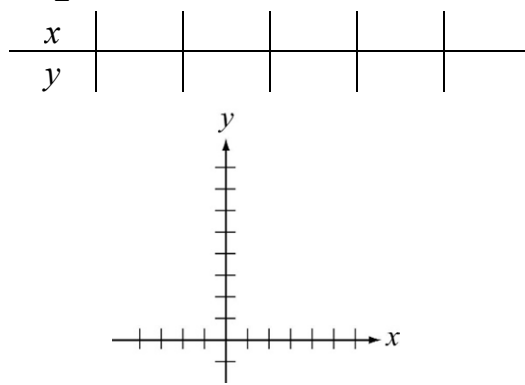
此圖形開口向____，有最_____點，

當 x 為_____時， y 有最_____值_____。

(提示:找頂點坐標)

2. 請在坐標平面上畫出二次函數

$y=\frac{1}{2}x^2$ 圖形。



此圖形開口向____，有最_____點，

當 x 為_____時， y 有最_____值_____。

(提示:找頂點坐標)



☆已知二次函數 $y = -x^2$

1. 請完成下列表格

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y											

① x 的值從 $\dots -4, -3, -2, -1, 0$

y 的值會慢慢_____。

② x 的值從 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

y 的值會慢慢_____。

☆發現

二次函數 $y = -x^2$

y 有_____值_____此時 $x =$ _____

☆觀察 $y = -x^2$ 的圖形

① 當 x 坐標從 $\dots -4, -3, -2, -1, \dots$

y 坐標會慢慢_____。

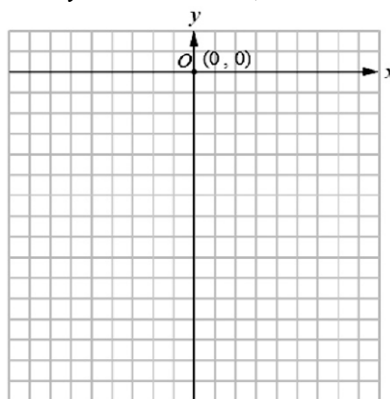
就是會慢慢_____。

② 當 x 坐標從 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

y 坐標會慢慢_____。

就是會慢慢_____。

2. 畫 $y = -x^2$ 的圖形



☆發現

$y = -x^2$ 的圖形是_____

開口向____，有最_____點

y 有_____值_____

此時 $x =$ _____

★筆記

1. 二次函數的最大值或最小值指的是_____值

2. 二次函數 $y = -x^2$ 的圖形開口向_____，

有最_____點

y 有最_____值_____

此時 $x =$ _____

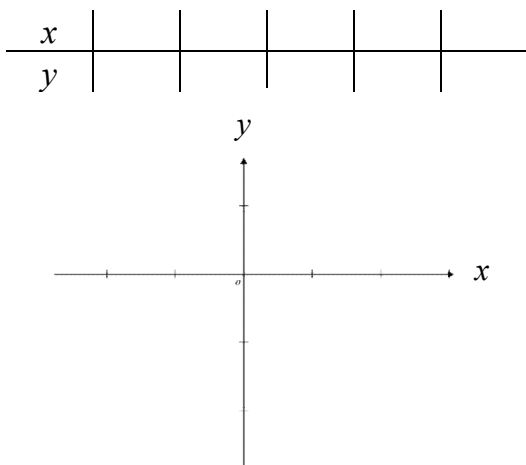
3. 最高（低）點

就是_____點。



牛刀小試 2

1. 請在坐標平面上畫出二次函數 $y = -2x^2$ 圖形



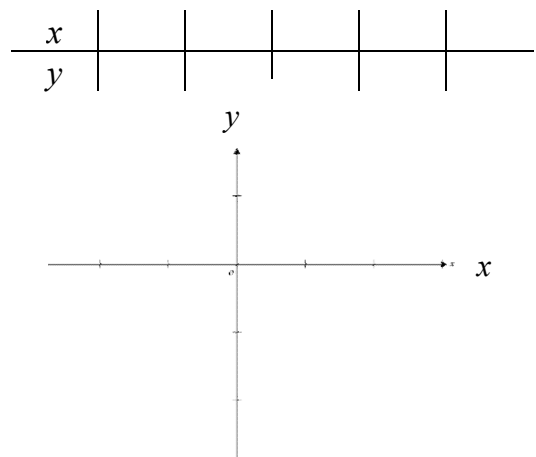
此圖形開口向_____，有最_____點，

當 x 為_____時， y 有最_____值_____。

(提示: 找頂點坐標)

2. 請在坐標平面上畫出二次函數

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ 圖形}$$



此圖形開口向_____，有最_____點，

當 x 為_____時， y 有最_____值_____。

(提示: 找頂點坐標)



例題 ① 由圖形判斷最大 (小) 值 1



已知二次函數 $y=2x^2+3$

(1) 頂點坐標是_____

(2) 請在下方的框框畫出簡圖

(3) 圖形開口向_____，有最_____點。

y 有最_____值，此時 $x=$ _____。

簡圖

★筆記



牛刀小試 3

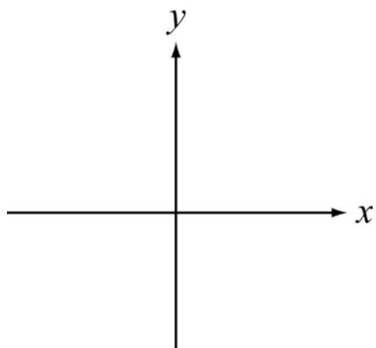
1. 已知二次函數 $y=x^2+2$ ，

(1) 頂點坐標為(____，____)。

(提示： x 坐標讓平方=0 再代入算出 y)

(2) 請在下圖框框畫簡圖。(提示:先找到頂點，判斷開口方向)

簡圖



(3) 圖形開口向_____，有最_____點，

當 $x=$ _____時， y 有最_____值_____。

(提示:即頂點坐標)

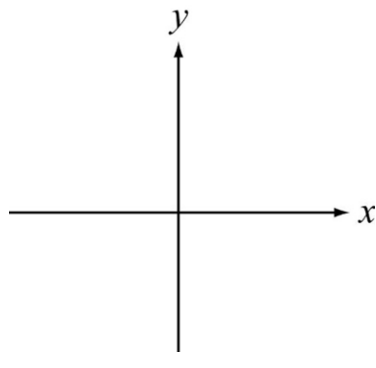
2. 已知二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2+4$ ，

(1) 頂點坐標(____，____)。

(提示： x 坐標讓平方=0 再代入算出 y)

(2) 請在下圖框框畫簡圖。(提示:先找到頂點，判斷開口方向)

簡圖



(3) 圖形開口向_____，有最_____點，

當 $x=$ _____時， y 有最_____值_____。



例題 ② 由圖形判斷最大 (小) 值 2



已知二次函數 $y = -(x+2)^2$

★筆記

- (1) 頂點坐標是_____
- (2) 請在下方的框框畫出簡圖
- (3) 圖形開口向_____, 有最_____點。
 y 有最_____值, 此時 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

簡圖



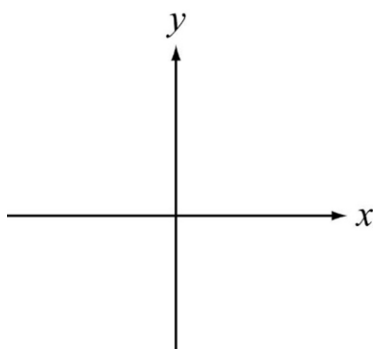
牛刀小試 4

1. 已知二次函數 $y = -(x+1)^2$,

- (1) 頂點坐標為(____, ____)
 (提示: x 坐標讓平方=0 再代入算出 y)

- (2) 請在框中畫出簡圖。(提示: 先找到頂點, 判斷開口方向)

簡圖



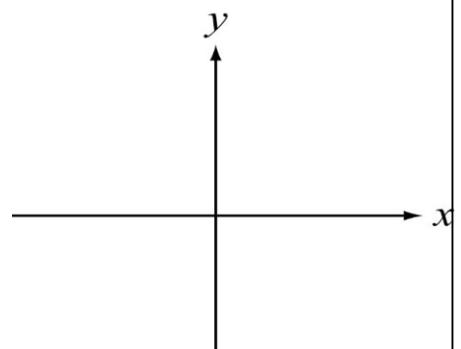
- (3) 圖形開口向_____, 有最_____點,
 當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時, y 有最_____值_____。
 (提示: 即頂點坐標)

2. 已知二次函數 $y = (x-4)^2$,

- (1) 頂點坐標為(____, ____)
 (提示: x 坐標讓平方=0 再代入算出 y)

- (2) 請在框中畫出簡圖。(提示: 先找到頂點, 判斷開口方向)

簡圖



- (3) 圖形開口向_____, 有最_____點,
 當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時, y 有最_____值_____。
 (提示: 即頂點坐標)



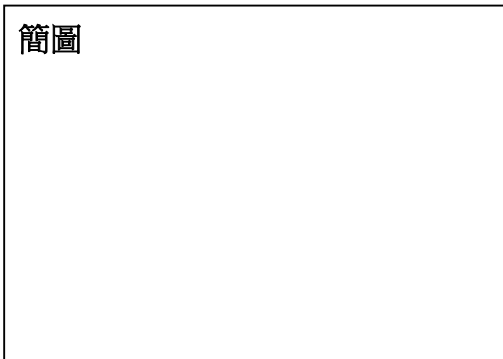
例題 ③ 由圖形判斷最大(小)值 3



已知二次函數 $y = -3(x-1)^2 - 4$

- (1) 頂點坐標是_____
- (2) 請在下方的框框畫出簡圖
- (3) 圖形開口向_____，有最_____點。
 y 有最_____值，此時 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

簡圖



★筆記



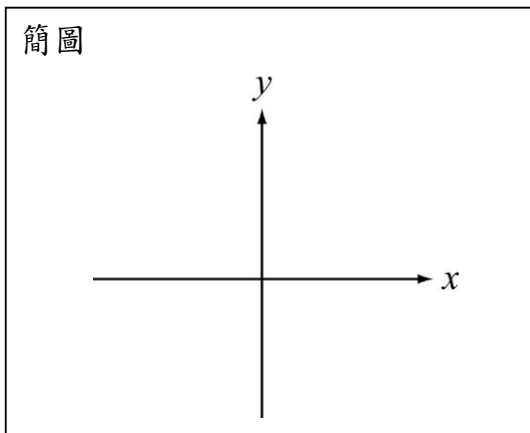
牛刀小試 5

1. 已知二次函數 $y = -2(x-3)^2 + 1$

- (1) 頂點坐標為(____, ____)
 (提示: x 坐標讓平方=0 再代入算出 y)

- (2) 請在框中畫出簡圖。(提示: 先找到頂點, 判斷開口方向)

簡圖



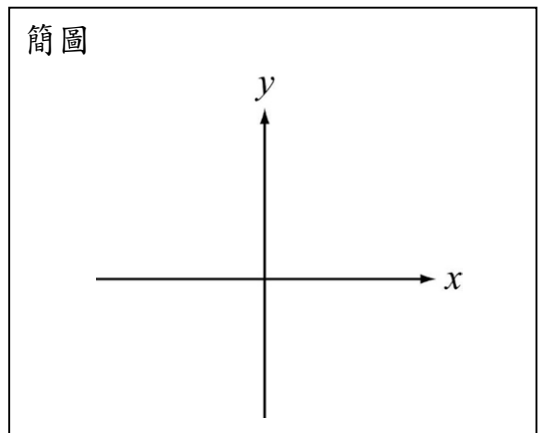
- (3) 圖形開口向_____，有最_____點，
 當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， y 有最_____值_____。
 (提示: 即頂點坐標)

2. 已知二次函數 $y = 2(x+3)^2 - 1$

- (1) 頂點坐標(____, ____)
 (提示: x 坐標讓平方=0 再代入算出 y)

- (2) 請在框中畫出簡圖。(提示: 先找到頂點, 判斷開口方向)

簡圖



- (3) 圖形開口向_____，有最_____點，
 當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， y 有最_____值_____。
 (提示: 即頂點坐標)



例題 4 由圖形判斷最大(小)值 4



已知二次函數 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 5$

- (1) 頂點坐標是_____
- (2) 請在下方的框框畫出簡圖
- (3) 圖形開口向_____，有最_____點
 y 有最_____值，此時 $x =$ _____

簡圖

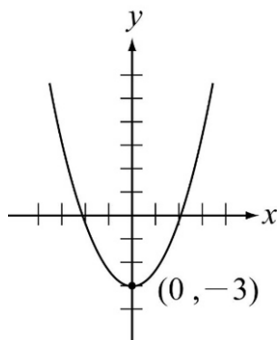
★筆記



牛刀小試 6

1. 請問下列何者為此圖形的二次函數？

- (A) $y = -(x-1)^2 - 3$
- (B) $y = -x^2 - 3$
- (C) $y = (x+3)^2$
- (D) $y = x^2 - 3$

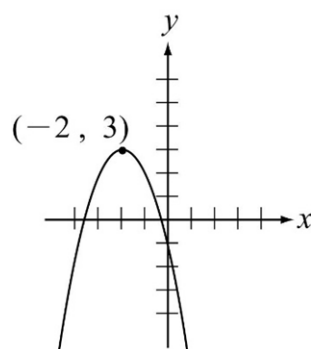


提示思考步驟:

1. 開口向上，判斷平方前係數應為正。
2. 看頂點 $(0, -3)$ ，平方應為 0 且 x 坐標為 0。
3. $x=0$ 代入後求得 y

2. 請問下列何者為此圖形的二次函數？

- (A) $y = -(x+3)^2$
- (B) $y = -(x-2)^2 + 3$
- (C) $y = -(x+2)^2 + 3$
- (D) $y = -(x+2)^2 - 3$



提示思考步驟:

1. 開口向下，判斷平方前係數應為負。
2. 看頂點 $(-2, 3)$ ，平方應為 0 且 x 坐標為 -2。
3. $x=-2$ 代入後求得 y



例題 5 快速判斷二次函數的最大值或最小值



下列二次函數在 x 為多少時， y 有最大值或最小值？並求出 y 值

$$(1) y = \frac{2}{3}(x-5)^2 - 7$$

$$(2) y = -199(x+4)^2 + 20$$

★筆記

☆要求二次函數的最大值或最小值，
關鍵在：

① _____ ② _____



牛刀小試 7

1. $y = 7(x+2)^2 + 33$

(1) 是一個開口向 _____ 的圖形，

(2) 頂點為(____, ____)。

(3) 當 x 為 _____ 時， y 有最 _____ 值 _____。

2. $y = -3(x-11)^2 - 10$

(1) 是一個開口向 _____ 的圖形，

(2) 頂點為(____, ____)。

(3) 當 x 為 _____ 時， y 有最 _____ 值 _____。

思考步驟：

1. 看平方前係數判斷開口方向。

2. 讓平方=0 求出 x 值，再代入求出 y 值，即為頂點。

3. $y = \frac{9}{7}(x+3)^2 - \frac{20}{3}$

(1) 是一個開口向 _____ 的圖形，

(2) 頂點為(____, ____)。

(3) 當 x 為 _____ 時， y 有最 _____ 值 _____。

4. $y = \frac{3}{16}(x-2)^2 + 4$

(1) 是一個開口向 _____ 的圖形，

(2) 頂點為(____, ____)。

(3) 當 x 為 _____ 時， y 有最 _____ 值 _____。



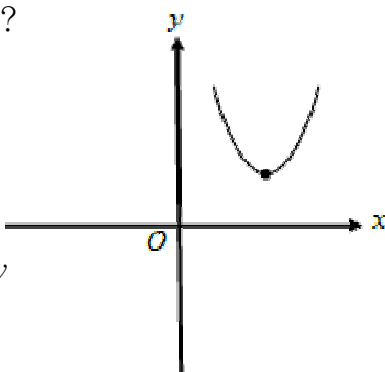
☆1. 請問：右圖的二次函數和 y 軸會相交嗎？

2. 已知：這個二次函數是 $y = -(x-3)^2 + 2$

請問：它和 y 軸的交點座標是多少？

☆ y 軸上的點， x 坐標一定是_____

所以只要把 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 代入就可以求出 y



★筆記

所有的二次函數的圖形都會和 y 軸相交嗎？



牛刀小試 8

1. 請問所有二次函數的圖形都會穿過 y 軸嗎？答：_____。

2. 只要在 y 軸上的點，_____坐標一定是 0

例 $y = 2(x+3)^2 - 4$

把 _____ = 0 代入，求出 y

= _____。

∴ $y = 2(x+3)^2 - 4$ 與 y 軸交點為_____。

3. 請找出 $y = -2(x+1)^2 - 3$ 與 y 軸的交點。

答：_____。

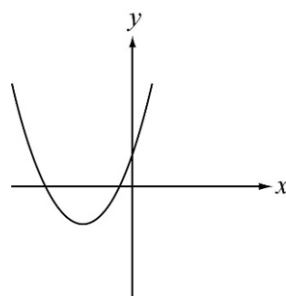
(提示： $x=0$ 代入求 y)

4. 請找出 $y = 7x^2 + 6x - 5$ 與 y 軸的交點。

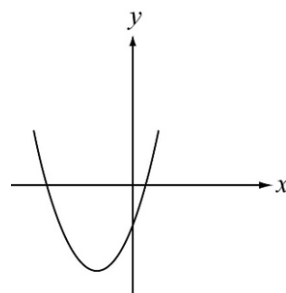
答：_____。

5. 請問圖中二次函數與 y 軸的交點為何？

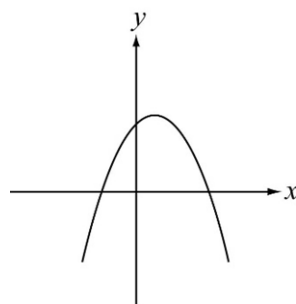
(1) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$



(2) $y = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 6$



(3) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 8x - 1$





☆想一想二次函數圖形和 x 軸有幾個交點呢？

請你依照給定的條件畫出簡圖

開口	2 個交點	1 個交點	0 個交點
向上			
向下			

☆關鍵：只要知道

① _____

② _____

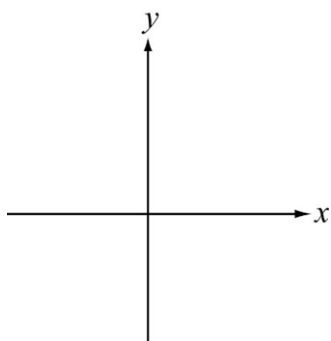
就可以知道二次函數和 x 軸有幾個交點

★筆記



牛刀小試 9

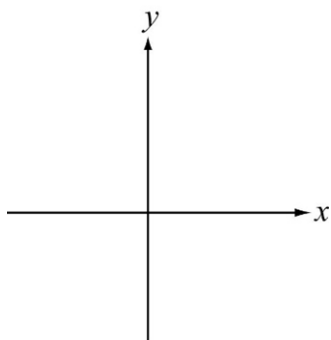
1. 請畫出 $y=2(x-2)^2+1$ 的簡圖。



由此圖形可知

$y=2(x-2)^2+1$ 和 x 軸有 _____ 個交點。

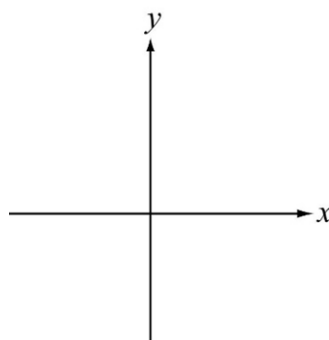
2. 請畫出 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的簡圖。



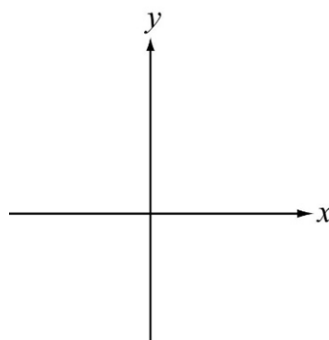
此圖形可知

$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 和 x 軸有 _____ 個交點。

3. 請畫出 $y=2x^2-5$ 的簡圖，並判斷有幾個和 x 軸相交的交點？



4. 請畫出 $y=-6(x+3)^2-2$ 的簡圖，並判斷有多少個和 x 軸相交的交點？



(提示：找出頂點，畫簡圖判斷)

**例題****6****二次函數圖形和 x 軸的相交情形**求下列二次函數和 x 軸的交點個數

(1) $y = -3(x-2)^2 + 1$

(2) $y = x^2 + 3$

(3) $y = 2(x+1)^2$

★筆記

**牛刀小試 10**1. 請問下列二次函數與 x 軸有幾個交點？

(1) $y = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 3$ 答：_____個。

(2) $y = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 10$ 答：_____個。

(3) $y = (x+9)^2 - 7$ 答：_____個。

(4) $y = 2(x-4)^2 + 6$ 答：_____個。

(5) $y = 5(x-4)^2$ 答：_____個。

(6) $y = 9x^2 - 3$ 答：_____個。

(7) $y = -10x^2$ 答：_____個。

(提示:判斷開口並找出頂點位置)

2. 請問下列哪些二次函數

(1) 與 x 軸沒有交點？答：_____。

(2) 與 x 軸只有一個交點？答：_____。

(3) 與 x 軸有 2 個交點？答：_____。

A. $y = -7(x+3)^2 - 2$

B. $y = \frac{7}{2}(x-10)^2 + 3$

C. $y = 5(x+6)^2 - 17$

D. $y = \frac{1}{10}x^2 - 4$

E. $y = -x^2 - 6$

F. $y = 9x^2$

G. $y = -(x+5)^2$

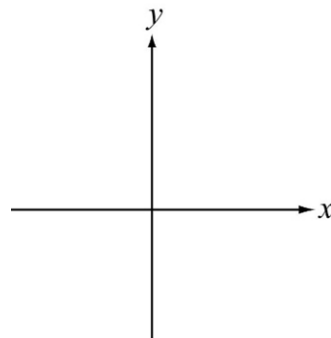
利用圖解

提示:

判斷開口方向並

找出頂點位置在坐

標平面上畫出簡圖。





牛刀小試 1

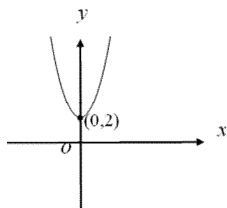
1. 上，低，0，小，0，圖略
2. 上，低，0，小，0，圖略

牛刀小試 2

1. 下，高，0，大，0，圖略
2. 下，高，0，大，0，圖略

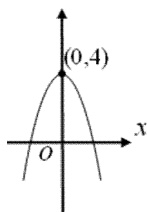
牛刀小試 3

1. (1) (0, 2)
(2)



- (3) 上，低，0，小，2

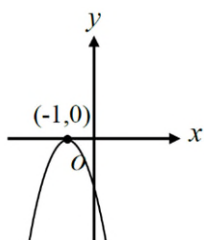
2. (1) (0, 4)
(2)



- (3) 下，高，0，大，4
(4)

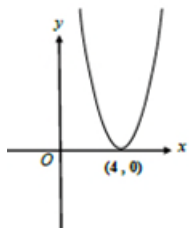
牛刀小試 4

1. (1) (-1, 0),
(2)



- (3) 下，高，-1，大，0

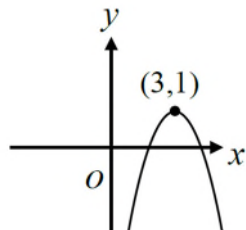
2. (1) (4, 0)
(2)



- (3) 上，低，4，小，0

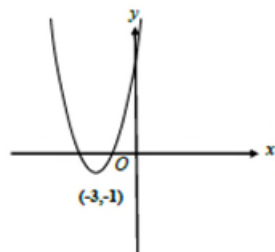
牛刀小試 5

1. (1) (3, 1),
(2)



- (3) 下，高，3，大，1

2. (1) (-3, -1)
(2)



- (3) 上，低，-3，小，-1

牛刀小試 6

1. D
2. C

牛刀小試 7

1. (1) 上，
(2) (-2, 33)
(3) -2，小，33，

2. (1) 下
(2) (11, -10)
(3) 11，大，-10

3. (1) 上
(2) $(-3, -\frac{20}{3})$
(3) -3，小， $-\frac{20}{3}$

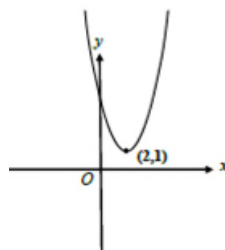
4. (1) 上
(2) (2, 4)
(3) 2，小，4

牛刀小試 8

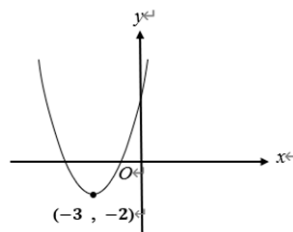
1. 是
2. $x, x, 14, (0, 14)$
3. $(0, -5)$
4. $(0, -5)$
5. (1) $(0, 1)$
(2) $(0, -3)$
(3) $(0, -1)$

牛刀小試 9

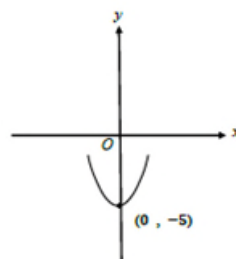
1. 0 個



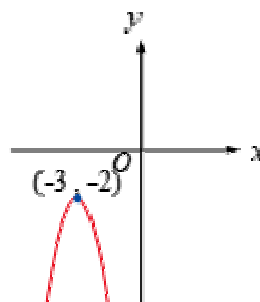
2. 2 個



3. 2 個



4. 0 個



牛刀小試 10

1. (1) 2 個
(2) 2 個
(3) 2 個
(4) 0 個
(5) 1 個
(6) 2 個
(7) 1 個
2. (1) A, B, E
(2) F, G
(3) C, D