數學 1 進階講義

指數函數的定義、遞增與遞減、圖形特徵

景美女中・李冠達老師

信望愛文教基金會

3-2-1~3　指數函數的定義、遞增與遞減、圖形特徵

定理敘述

1. 指數函數的定義

$a>0$ 且 $a\neq 1$，x 為任意實數，函數 $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底數的指數函數。

其中定義域為所有實數，對應域(值域)為所有正實數。

2. 函數遞增與遞減定義

若 x_1 、 x_2 為實數且 $x_2>x_1$ ，則

(1) 當 $f(x_2)\geq f(x_1)$ 時，稱 $f(x)$ 為遞增函數。

(2) 當 $f(x_2)\leq f(x_1)$ 時，稱 $f(x)$ 為遞減函數。

(3) 當 $f(x_2)>f(x_1)$ 時，稱 $f(x)$ 為嚴格遞增函數。

(4) 當 $f(x_2)<f(x_1)$ 時，稱 $f(x)$ 為嚴格遞減函數。

3. 圖形特性

(1) 對於任意實數 x ， $f(x)=a^x>0$ 恆成立，以圖形來看， $f(x)$ 的圖形恆在 x 軸的上方。

(2) 對於任意實數 x ， $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$ 恆成立。

(3) 指數函數的圖形恆過 $(0,1)$ 。

(4) 指數函數的圖形凹口向上。

(5) 當 $a>1$ ， $f(x)=a^x$ 圖形為嚴格遞增；

當 $0<a<1$ ， $f(x)=a^x$ 圖形為嚴格遞減。

定理證明或說明

1. 【證】對於任意實數 x ， $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$ 恆成立。

因為 $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\times a^{x_2}=f(x_1)\times f(x_2)$ 。

2. 【證】指數函數的圖形恆過 $(0,1)$ 。

因為當以 $x=0$ 代入得 $f(0)=a^0=1$ ，即 $(0,f(0))=(0,1)$ 。

3.【證】若函數滿足 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，即稱該函數的圖形凹口向上。

以圖形來看，就是圖形上任兩點的連線段在函數圖形上方。

證明：利用算幾不等式證明，

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\sqrt{a^{x_1}\times a^{x_2}}\le\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

注意事項

1. 底數 a 一定要為正值。

2. 指數函數 $f(x)=a^x$ 的圖形恆在 x 軸的上方。

3. $a\ne1$。

關鍵字

指數函數、遞增與遞減。

例題 1

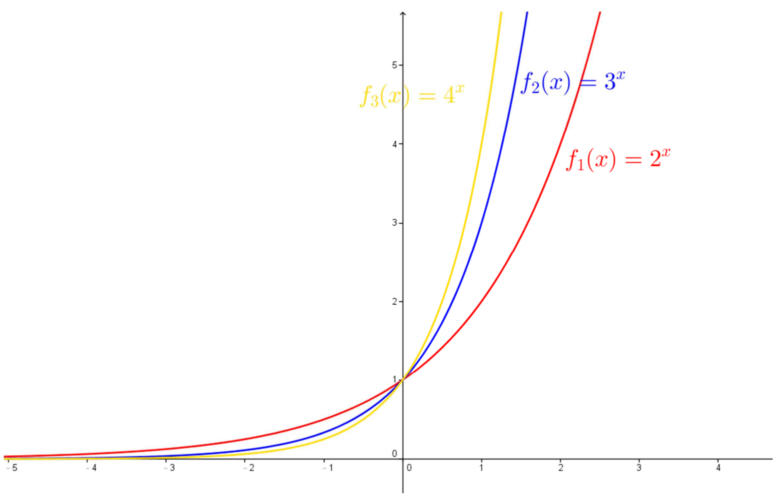
請畫出 $f_1(x)=2^x$、$f_2(x)=3^x$、$f_3(x)=4^x$ 三個指數函數圖形，並觀察說明其圖形變化。

Ans：

1.當 $a>1$ 時，發現當 a 越大且 $x>0$ 後，
$f(x)=a^x$ 的圖形越陡峭，
即當 $x>0$ 時，$f_1(x)<f_2(x)<f_3(x)$ 或
$2^x<3^x<4^x$
但是當 $x<0$ 時，$f_1(x)>f_2(x)>f_3(x)$
或 $2^x>3^x>4^x$

2.三個函數圖形皆通過 $(0,1)$。

3.三個函數圖形皆在 x 軸上方，且越往左邊越接近 x 軸。

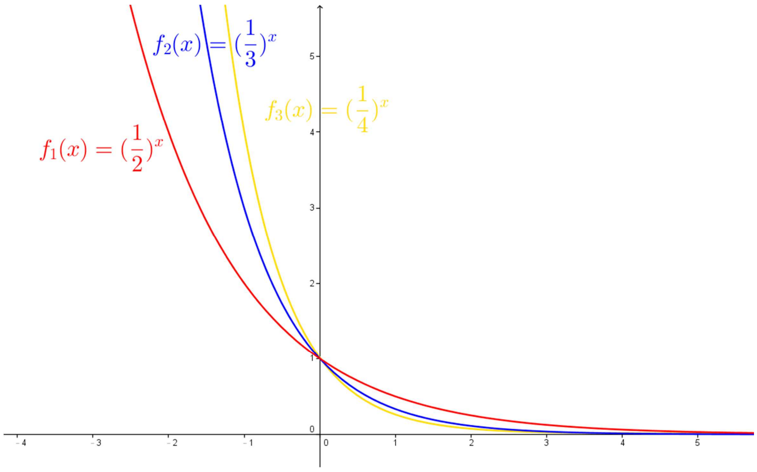


（補充說明：x 軸為 $f(x)=a^x$ 的漸近線）

例題 2

請畫出 $f_1(x)=(\frac{1}{2})^x$、 $f_2(x)=(\frac{1}{3})^x$、 $f_3(x)=(\frac{1}{4})^x$ 三個指數函數圖形，並觀察說明其圖形變化。

Ans：



1.當 $a<1$ 時，發現當 a 越小且 $x>0$ 後， $f(x)=a^x$ 的圖形越平緩，

即當 $x>0$ 時， $f_1(x)>f_2(x)>f_3(x)$ 或 $(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{3})^x>(\frac{1}{4})^x$

但是當 $x<0$ 時， $f_1(x)<f_2(x)<f_3(x)$ 或 $(\frac{1}{2})^x<(\frac{1}{3})^x<(\frac{1}{4})^x$

2.三個函數圖形皆通過 $(0,1)$ 。

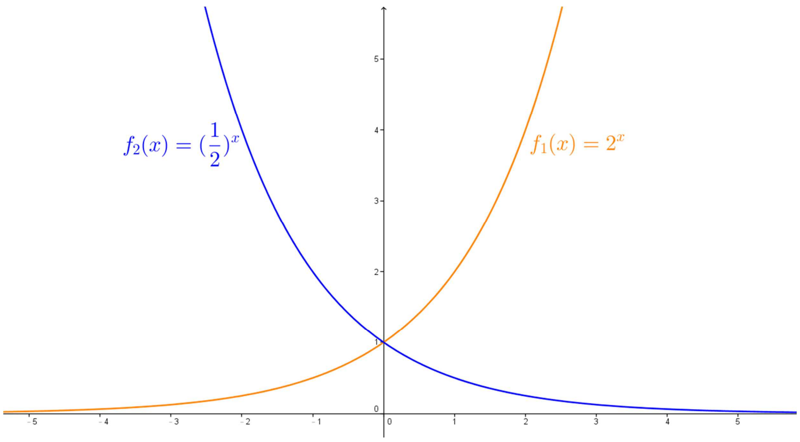
3.三個函數圖形皆在 x 軸上方，且越往右邊越接近 x 軸。

（補充說明： x 軸為 $f(x)=a^x$ 的漸近線）

例題 3

請畫出 $f_1(x)=2^x$ 、 $f_2(x)=(\frac{1}{2})^x$ 兩個指數函數圖形，並觀察說明其圖形變化。

Ans：



1.兩個圖形皆通過 $(0,1)$ 。

2.兩個函數圖形皆在 x 軸上方。

3.兩個圖形以 y 軸為對稱軸。

例題 4

將下列各數依大小順序排之： $a=2^{\frac{2}{3}},b=4^{\frac{5}{2}}\times 8^{-1},c=(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}},d=2^{-3},e=(2^{-\frac{2}{7}})^{7}$

Ans：

$$b=4^{\frac{5}{2}}\times 8^{-1}=(2^{2})^{\frac{5}{2}}\times(2^{3})^{-1}=2^{5-3}=2^{2}$$

$$c=(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}=(2^{-1})^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$$

$$e=(2^{-\frac{2}{7}})^{7}=2^{-2}$$

因為 $2^{2}>2^{\frac{4}{3}}>2^{\frac{2}{3}}>2^{-2}>2^{-3}$ ，

所以 $b>c>a>e>d$ 。

例題 5

將下列各數依大小順序排之： $p=5^{\frac{1}{2}},q=4^{\frac{2}{3}},r=3^{\frac{3}{4}}$

Ans：

$$p=5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{5^{6}}=\sqrt[12]{15625}$$

$$q=4^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{16}{12}}=\sqrt[12]{2^{16}}=\sqrt[12]{65536}$$

$$r=3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{9}{12}}=\sqrt[12]{3^{9}}=\sqrt[12]{19683}$$

因為 $\sqrt[12]{65536}>\sqrt[12]{19683}>\sqrt[12]{15625}$

所以 $q>r>p$ 。

溫故知新

習題 1

請您比較 $a=5^{21}$ 、 $b=11^{14}$ 、 $c=2^{49}$ 的大小。

習題 2

請您比較 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt[3]{5}$ 、 $\sqrt[4]{7}$ 的大小。

習題 3

請您比較 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{3}$ 、 $\sqrt[5]{5}$ 的大小。

習題 4

請您比較 $a=10^{0.5}$ 、 $b=\dfrac{10^{0.4}+10^{0.6}}{2}$ 的大小。

習題 5

方程式 $x^2=2^x$ 有多少個實根？（提示：請畫圖觀察交點個數）

解答與解析

習題 1： $c>a>b$

習題 2： $\sqrt{3}>\sqrt[3]{5}>\sqrt[4]{7}$

習題 3： $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$

習題 4： $b>a$

習題 5：3 個