

數學 1 進階講義

有理數

景美女中 · 林志強老師



信望愛文教基金會



1-1 有理數



有理數

1.實數中，可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的數，稱為有理數（其中 p, q 為整數，且 $p \neq 0$ ）。

2.有理數包含整數、有限小數或循環小數。

3.任意兩有理數加、減、乘、除所得的數，仍為有理數。

4.任兩個相異的有理數之間，至少存在一個有理數。

5. (1) $0.\overline{a} = \frac{a}{9}$, $0.\overline{ab} = \frac{ab}{99}$, $0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$, $0.\overline{abcd} = \frac{abcd}{9999}$,依此類推。

(2) $0.a\overline{b} = \frac{ab-a}{90}$, $0.ab\overline{c} = \frac{abc-a}{990}$, $0.abc\overline{d} = \frac{abcd-ab}{9900}$,依此類推。

說明：循環節下有 k 個數，分母有 k 個9。沒有循環的有 h 個數，分母有 h 個0 分子為全部的小數減掉沒有循環的小數。

6.最簡分數 $\frac{q}{p}$ 可化為有限小數時，分母 p 只有2或5兩個質因數。

例題 1

試將下列有理數寫成小數：(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{7}$

例題 2

下列何者為有理數？

(1)0.0234 (2) $0.\overline{23}$ (3) π (4) $\sqrt{169}$ (5) $3-4\sqrt{3}$

例題 3

將 $\frac{3}{7}$ 化成小數，若小數點以下第 n 位數字記作 a_n ，試問：

(1) $a_1 =$ _____ (2) $a_2 =$ _____

(3) $a_{27} =$ _____ (4) $a_{100} =$ _____

例題 4

試將下列各循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{32}$ (2) $0.\overline{345}$ (3) $0.3\overline{45}$ (4) $0.31\overline{61}$ (5) $3.45\overline{6}$

例題 5

下列哪些有理數可化成有限小數？

(1) $\frac{43}{32}$ (2) $\frac{79}{15}$ (3) $\frac{17}{50}$ (4) $\frac{1}{320}$ (5) $\frac{21}{30}$

解答與解析

例題 1：(1)0.25 (2) $0.1\overline{6}$ (3) 0.142857

解析：(1)
$$\begin{array}{r} 0.25 \\ 4 \overline{) 10} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$
 (2)
$$\begin{array}{r} 0.166\cdots \\ 6 \overline{) 10} \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 4\cdots \end{array}$$
 (3)
$$\begin{array}{r} 0.1428571\cdots \\ 7 \overline{) 10} \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 3\cdots \end{array}$$

例題 2：(1)(2)(4)

例題 3：(1)4 (2)2 (3)8 (4)5

解析： $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$

(1) $a_1 = 4$

(2) $a_2 = 2$

(3) 因為 6 個一循環 又 $27 \div 6 = 4 \cdots 3$ 所以 $a_{27} = a_3 = 8$

(4) 因為 $100 \div 6 = 16 \cdots 4$ 所以 $a_{100} = a_4 = 5$

例題 4：(1) $\frac{32}{99}$ (2) $\frac{115}{333}$ (3) $\frac{19}{55}$ (4) $\frac{313}{990}$ (5) $\frac{1037}{300}$

解析：(1) $0.\overline{32} = \frac{32}{99}$

$$(2) 0.\overline{345} = \frac{345}{999} = \frac{115}{333}$$

$$(3) 0.\overline{345} = \frac{345-3}{990} = \frac{19}{55}$$

$$(4) 0.\overline{3161} = \frac{3161-31}{9900} = \frac{313}{990}$$

$$(5) 3.\overline{456} = 3 + 0.\overline{456} = 3 + \frac{456-45}{900} = 3 + \frac{137}{300} = \frac{1037}{300}$$

例題 5 : (1)(3)(4)