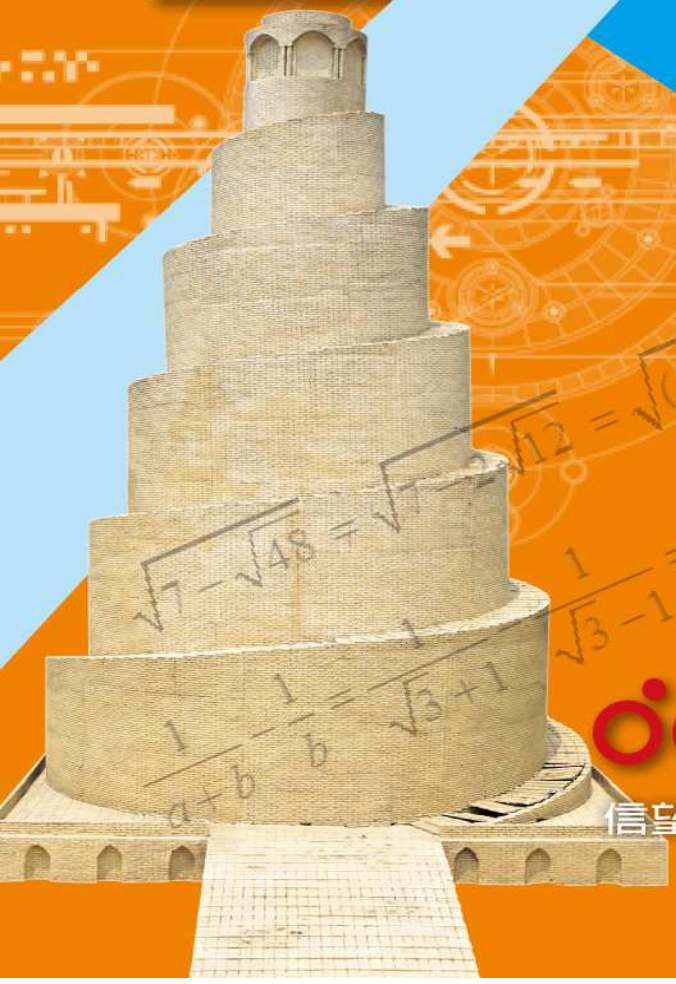
高中數學 進階講義

數與數線

陳清海 老師



信望愛文教基金會

ok111 數與數線

1. 有理數

1. 有理數的定義：可以表示成$\frac{q}{p}$的數，稱為有理數．其中 p, q 為整數，且 $p \neq 0$ ．
2. 任意兩有理數加、減、乘、除（0 不能當除數）的結果，仍為有理數．
3. 有理數的稠密性：任兩個相異有理數之間，至少有一個有理數存在．
4. 一個已化成最簡分數的有理數，如果分母的質因數只有 2 或 5，這個有理數一定可以化成有限小數．

【範例 1】

將有理數 $\frac{131}{990}$ 化成小數後，小數點後第 100 位的數字為何?

Ans：3

【詳解】

因為 $\frac{131}{990}=0.1\overline{32}$,

所以小數點後第 100 位的數字為 3 .

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 0 & 1 & 3 & 2 \\
 & 99 & 1 & 3 & 1 & & \\
 & & & 9 & 9 & & \\
 & & & 3 & 2 & 0 & \\
 & & & 2 & 9 & 7 & \\
 & & & & 2 & 3 & 0 \\
 & & & & 1 & 9 & 8 \\
 & & & & & 3 & 2
\end{array}
$$

【演練 1】

試選出正確的選項:

(1) $0.3\overline{43}$ **不是有理數。(2)** $0.\overline{34}>\frac{1}{3}$ **．(3)** $0.\overline{34}>0.343$ **．(4)** $0.\overline{34}<0.35$ **．**

(5) $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$ **．**

Ans：(2)(3)(4)(5)

【詳解】

(1) 錯誤．所有循環小數都是有理數．

(2) $0.\overline{34}=0.3434\cdots\succ 0.333\cdots=\frac{1}{3}$

(3) $0.\overline{34}=0.3434\cdots\succ 0.343$

(4) $0.\overline{34}=0.3434\cdots\prec 0.35$

故選項(2)(3)(4)(5)正確．

【例題 2】

將下列各循環小數化成最簡分數：

(1) $0.\overline{09}$ **．** **(2)** $0.2\overline{13}$ **．**

Ans：(1) $\frac{1}{11}$，(2) $\frac{221}{990}$

【詳解】

(1) 設 x＝ $0.\overline{09}$，則 $100x=9.\overline{09}$ ．

將兩式相減， $100x-x=9.\overline{09}-0.\overline{09}$，

得 $99x=9$，因此 $x=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$ ．

(2) 設 $x=0.2\overline{13}$，則 $10x=2.\overline{13}$， $1000x=213.\overline{13}$ ．

將兩式相減， $1000x-10x=213.\overline{13}-2.\overline{13}$，

得 $990x=213-2$，因此 $x=\frac{213-2}{990}=\frac{211}{990}$ ．

【演練 2】

將下列各循環小數化成最簡分數：

(1) $0.\overline{9}$ **．** **(2)** $1.0\overline{25}$ **．**

Ans：(1) 1，(2) $\frac{203}{198}$

【詳解】

(1) 設 $x=0.\overline{9}$，則 $10x=9.\overline{9}$ ．

將兩式相減， $10x-x=9.\overline{9}-0.\overline{9}$，

得 $9x=9$，因此 $x=\frac{9}{9}=1$ ．

(2) 設 $x=1.0\overline{25}$，則 $10x=10.\overline{25}$， $1000x=1025.\overline{25}$ ．

將兩式相減， $1000x-10x=1025.\overline{25}-10.\overline{25}$，

得 $990x=1025-10$，因此 $x=\frac{1025-10}{990}=\frac{1015}{990}=\frac{203}{198}$ ．

【範例 3】

設 $a+b$ 與 $a-b$ 都是有理數，請問 a 與 b 都是有理數嗎？

Ans：是

【詳解】

因為 $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$，

$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$

均為有理數 a＋b，a－b 與 2 的四則運算，

所以 a、b 均為有理數．

【演練 3】

設 2a＋b 與 a－2b 都是有理數，請問 a 與 b 都是有理數嗎?

Ans：是

【詳解】

因為 $a=\frac{2(2a+b)+(a-2b)}{5}$，

$b=\frac{(2a+b)-2(a-2b)}{5}$

均為有理數 2a＋b，a－2b 與 5 的四則運算，

所以 a、b 均為有理數．

【範例 4】

下列哪些有理數可化成有限小數?

(1) $\frac{41}{16}$，**(2)** $\frac{137}{15}$，**(3)** $\frac{7}{50}$，**(4)** $\frac{1}{512}$，**(5)** $\frac{21}{15}$．

Ans：(1)(3)(4)(5)

【詳解】

一個已化成最簡分數的有理數，

如果分母的質因數只有 2 或 5，

這個有理數一定可以化成有限小數，又 $\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$，

故答案為(1)(3)(4)(5)．

【演練 4】

下列哪些有理數可化成有限小數?

(1) $\frac{23}{8}$，**(2)** $\frac{13}{30}$，**(3)** $\frac{49}{350}$，**(4)** $\frac{1}{27}$，**(5)** $\frac{11}{20}$．

Ans：(1)(3)(5)

【詳解】

因為 $\frac{49}{350}=\frac{7}{50}$，所以答案為(1)(3)(5)．

2. 無理數

1. 數線上，我們稱「不是有理數的數」為無理數．

2. (1) 設 a, b 是有理數，若 $a+b\sqrt{3}=0$，則 $\boldsymbol{a=b=0}$ ．

   (2) 設 a, b, c, d 是有理數，若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，則 $\boldsymbol{a=c}$ 且 $\boldsymbol{b=d}$ ．

3. 雙重根式的化簡：設 x, y 為正整數，且 $x>y$ ．

   (1) $\sqrt{(x+y)+2\sqrt{xy}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{y}}$ ．

   (2) $\sqrt{(x+y)-2\sqrt{xy}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}}-\sqrt{\boldsymbol{y}}$ ．

【範例 5】

已知 $\sqrt{3}$ 為無理數，試證下列各數也是無理數：

(1) $2+\sqrt{3}$ **(2)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **．**

【證明】

(1) 假設 $2+\sqrt{3}$ 是有理數，即 $2+\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，

其中 p，q 為整數，$p\neq 0$．

因為 $2+\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，所以可推得 $\sqrt{3}=\frac{q}{p}-2=\frac{q-2p}{p}$ ．

因為 $p,\ q-2p$ 為整數，

所以 $\sqrt{3}$ 是有理數，與題意矛盾．

故 $2+\sqrt{3}$ 是無理數．

(2) 假設 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理數，即 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，

其中 $p,\ q$ 為整數，$p\neq 0$ ．

因為 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，所以 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}-\sqrt{3}$，

兩邊平方、展開得到

$$2=\frac{q^2}{p^2}-2\cdot\frac{q}{p}\cdot\sqrt{3}+3\ \Rightarrow\ \frac{2q}{p}\sqrt{3}=\frac{q^2}{p^2}+1=\frac{q^2+p^2}{p^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\frac{q^2+p^2}{p^2}}{\frac{2q}{p}}=\frac{p^2+q^2}{2pq}\ .$$

又因為 $p,\ q$ 為整數，

所以 $2pq,\ p^2+q^2$ 皆為整數，推得 $\sqrt{3}$ 是有理數，

與題意矛盾．故 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是無理數．

【演練 5】

已知 $\sqrt{3}$ 為無理數，試證 $5\sqrt{3}$ 也是無理數．

【證明】

假設 $5\sqrt{3}$ 是有理數，即 $5\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，其中 $p,\ q$ 為整數，$p\neq 0$ ．

因為 $5\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，所以可推得 $\sqrt{3}=\frac{q}{5p}$ 為有理數，

與題意矛盾．

因此，$5\sqrt{3}$ 是無理數．

【範例 6】

設 x, y 均為有理數，

若 $\left(1-3\sqrt{2}\right)x+\left(2+\sqrt{2}\right)y=5-\sqrt{2}$，求 x, y 之值．

Ans：x＝1，y＝2

【詳解】

經移項整理得 $\left(x+2y-5\right)+\left(-3x+y+1\right)\sqrt{2}=0$，

因為 x, y 都是有理數，

所以 $x+2y-5$ 和 $-3x+y+1$ 也都是有理數，

必有 $\begin{cases}x+2y-5=0\\-3x+y+1=0\end{cases}$．

解得 $x=1$, $y=2$ ．

【演練 6】

設 x, y 是兩有理數，已知 $\left(2+\sqrt{3}\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)y=7-\sqrt{3}$，求 x, y 之值．

Ans：x＝2，y＝3

【詳解】

經移項整理得 $\left(2x+y\right)+\left(x-y\right)\sqrt{3}=7-\sqrt{3}$，

因為 x，y 是有理數，

所以(2x＋y)和(x－y)均為有理數，而 $\sqrt{3}$ 是無理數，

必有 $\begin{cases}2x+y=7\\x-y=-1\end{cases}$．

故得 x＝2，y＝3。

【範例 7】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{\frac{4}{3}}$　　**(2)** $\frac{2}{5-\sqrt{21}}+\frac{2}{5+\sqrt{21}}$ ．

Ans：(1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，(2) 5

【詳解】

(1) $\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{\frac{4}{3}}=3\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ．

(2) $\frac{2}{5-\sqrt{21}}+\frac{2}{5+\sqrt{21}}=\frac{2\left(5+\sqrt{21}\right)+2\left(5-\sqrt{21}\right)}{\left(5-\sqrt{21}\right)\left(5+\sqrt{21}\right)}$

$=\frac{20}{5^2-\left(\sqrt{21}\right)^2}=\frac{20}{4}=5$ ．

【演練 7】

化簡下列各式：

(1) $4\sqrt{27}+\sqrt{147}+3\sqrt{12}-9\sqrt{3}$

(2) $\frac{2}{3-\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}$ ．

Ans：(1) $16\sqrt{3}$，(2) 7

【詳解】

(1) $4\sqrt{27}+\sqrt{147}+3\sqrt{12}-9\sqrt{3}$

$=12\sqrt{3}+7\sqrt{3}+6\sqrt{3}-9\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ ．

(2) $\frac{2}{3-\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}$

$=\frac{2\left(3+\sqrt{7}\right)}{9-7}+\frac{4\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)}{11-7}+\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{16-11}$

$=3+\sqrt{7}+\sqrt{11}-\sqrt{7}+4-\sqrt{11}=7$ ．

【範例 8】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ **(2)** $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$ **(3)** $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ **(4)** $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$ **.**

Ans：(1) $2+\sqrt{3}$，(2) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$，(3) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$，(4) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【詳解】

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{3+4+2\sqrt{3\times4}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)^2}=\sqrt{3}+2$.

(2) 因為 $4\sqrt{5}=2\sqrt{20}$，所以

$$\sqrt{12-4\sqrt{5}}=\sqrt{12-2\sqrt{20}}$$

$$=\sqrt{10+2-2\sqrt{10\times2}}=\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{10}-\sqrt{2}\ .$$

(3) 因為 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$，所以

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2+2\sqrt{3\times2}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\ .$$

(4) 因為 $4\sqrt{3}=2\sqrt{12}$，所以

$$\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6+2-2\sqrt{6\times2}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\ .$$

【演練 8】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ **(2)** $\sqrt{14+4\sqrt{10}}$ **(3)** $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ **(4)** $\sqrt{8-\sqrt{28}}$ **.**

Ans：(1) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$，(2) $\sqrt{10}+2$，(3) $3+2\sqrt{2}$，(4) $\sqrt{7}-1$

【詳解】

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5+2-2\sqrt{5\times2}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

(2) 因為 $4\sqrt{10}=2\sqrt{40}$，所以

$$\sqrt{14+4\sqrt{10}}=\sqrt{14+2\sqrt{40}}$$

$=\sqrt{10+4+2\sqrt{10\times 4}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{10}+\sqrt{4}\right)^2}=\sqrt{10}+2$ ．

(3) 因為 $12\sqrt{2}=2\sqrt{72}$，所以

$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+2\sqrt{72}}$

$=\sqrt{9+8+2\sqrt{9\times 8}}=\sqrt{\left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)^2}=3+2\sqrt{2}$ ．

(4) 因為 $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，所以

$\sqrt{8-\sqrt{28}}=\sqrt{8-2\sqrt{7}}$

$=\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{1}\right)^2}=\sqrt{7}-1$ ．

【範例 9】

化簡 $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ ．

Ans：$\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

$\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-1\right)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$ ．

【演練 9】

化簡 $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ．

Ans：$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\ .$$

【範例 10】

設 $a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}$，試問 a 在哪兩個連續整數之間？

Ans：介於 3 與 4 之間

【詳解】

$$a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{6^2-2\cdot 6\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(6-\sqrt{5}\right)^2}=6-\sqrt{5}\ .$$

因為 $2<\sqrt{5}<3$，所以 $3<6-\sqrt{5}<4$，
故 a 介於 3 與 4 之間．

【演練 10】

設 $a=\sqrt{7+\sqrt{47}}$，則 a 在哪兩個連續整數之間？

(1) 0 與 1，(2) 1 與 2，(3) 2 與 3，(4) 3 與 4，(5) 4 與 5．

Ans：(4)

【詳解】

因為 $6<\sqrt{47}<7$，
所以 $13<7+\sqrt{47}<14$，

得 $3<\sqrt{7+\sqrt{47}}<4$ ．

故答案為(4)．

【範例 11】

設 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b-1}$ 的值．

Ans：4

【詳解】

因為

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{14+2\sqrt{5\cdot 3^2}}$$

$$=\sqrt{14+2\sqrt{45}}=\sqrt{\sqrt{9}^2+2\sqrt{9}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2},$$

所以 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{9}+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$ ．

又 $3+\sqrt{5}$ 的整數部分 a 為 5，

小數部分 b 為 $\left(3+\sqrt{5}\right)-5=\sqrt{5}-2$ ．因此

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{5+\left(\sqrt{5}-2\right)-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

$$=\frac{1\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}-\frac{1\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}$$

$$=\left(\sqrt{5}+2\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)$$

$=4$ ．

【演練 11】

設 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $\frac{1}{b}-\frac{7}{b+a}$ 的值．

Ans： $2\sqrt{2}-2$

【詳解】

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}=\sqrt{\left(\sqrt{9}+\sqrt{2}\right)^2}=3+\sqrt{2},$$

$3+\sqrt{2}$ 的整數部分 a 為 4，

小數部分 b 為 $\left(3+\sqrt{2}\right)-4=\sqrt{2}-1$ ．

$$\frac{1}{b}-\frac{7}{b+a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{7}{3+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}-\frac{7\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}$$

$$=\sqrt{2}+1-\left(3-\sqrt{2}\right)=-2+2\sqrt{2}\ .$$

【範例 12】

設正數 a 之小數部分為 b，且 $a^2+2b^2=15$，求 $a+2b$ ．

Ans：$3\sqrt{3}$

【詳解】

因為 $0\le b<1\ \Rightarrow\ 0\le b^2<1\ \Rightarrow 0\le 2b^2<2$，所以 $13<a^2\le 15$，

即 $\sqrt{13}<a\le\sqrt{15}$，故知 a 之整數部分為 3 ．

a＝3＋b 代入得 $\left(3+b\right)^2+2b^2=15$，解得 $b=\sqrt{3}-1$ ．

$a+2b=(3+b)+2b=3+3b=3+3\left(\sqrt{3}-1\right)=3\sqrt{3}$ 。

【演練 12】

若一正數 a 之小數部分為 b，且 $a^2+b^2=18$，求 $a+b$ ．

Ans：$2\sqrt{5}$

【詳解】

因為 0 ≦b＜1 ⇒ 0 ≦b^2＜1 ⇒ 17＜a^2≦18，即 $\sqrt{17}$ ＜a≦ $\sqrt{18}$ ，

故知 a 的整數部分為 4。

a＝4＋b 代入得$(4+b)^2+b^2=18$，解得 b＝ $\sqrt{5}-2$，

a＋b＝(4＋b)＋b＝4＋2b＝4＋2($\sqrt{5}-2$)＝2 $\sqrt{5}$ 。

3. 實數

1. 對任一實數 a，$a^2 \geq 0$ 恆成立．（$a^2 = 0$ 僅在 $a = 0$ 時成立）

2. 對任一實數 a，$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{當} a \geq 0 \text{時} \\ -a, & \text{當} a < 0 \text{時} \end{cases}$．

3. 算幾不等式：

   若 a, b 為正實數，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$．其中等號成立的條件是 $a = b$．

【範例 13】

已知實數 x, y 滿足 $|x+y-2|+(2x-y-7)^2=0$，求 x, y 的值．

Ans：x＝3，y＝−1

【詳解】

因為 x，y 都是實數，所以 $|x+y-2|\geq 0$ 且 $(2x-y-7)^2\geq 0$，

因此只有當 $x+y-2=0$ 和 $2x-y-7=0$ 時，原式才成立．

即 $\begin{cases}x+y-2=0\\2x-y-7=0\end{cases}$，解得 x＝3，y＝−1．

【演練 13】

已知實數 x, y 滿足 $(x+y)^2+(x-2y+6)^2=0$，求 x, y 的值．

Ans：x＝−2，y＝2

【詳解】

因為 x，y 都是實數，所以 $(x+y)^2\geq 0$ 且 $(x-2y+6)^2\geq 0$，

因此只有當 x＋y＝0 和 x－2y＋6＝0 時，原式才成立．

即 $\begin{cases}x+y=0\\x-2y+6=0\end{cases}$，解得 x＝−2，y＝2．

【範例 14】

若實數 a，b，c 滿足 abc＞0，ab＋bc＋ca＜0，a＋b＋c＞0，a＞b＞c，則下列選項何者為真?

(1) a＞0，(2) b＞0，(3) c＞0，(4) |a|＞|b|，(5) $a^2>c^2$．【91 學測】

Ans：(1)(4)(5)

【詳解】

因 abc＞0 且 a＞b＞c，

所以 a＞0，b＞0，c＞0 或 a＞0，b＜0，c＜0．

若 a＞0，b＞0，c＞0，

則 ab＋bc＋ca＞0．與 ab＋bc＋ca＜0 不合，

所以 a＞0，b＜0，c＜0．

又 a＋b＋c＞0，所以 |a|＞|b| 且 |a|＞|c| ⇒ $a^2>c^2$．

故選項(1)(4)(5)正確．

【演練 14】

若實數 a，b，c 滿足 abc＜0，a＋b＋c＞0，a＞b＞c，則下列選項何者為真？
(1) a＞0，(2) b＞0，(3) c＞0，(4) $a^2>c^2$，，(5) |a＋b|＞|c| .

Ans：(1)(2)(5)

【詳解】

因 abc＜0 且 a＞b＞c，
所以 a＜0，b＜0，c＜0 或 a＞0，b＞0，c＜0 .
若 a＜0，b＜0，c＜0，則 a＋b＋c＜0 . 與 a＋b＋c＞0 不合，
所以 a＞0，b＞0，c＜0 .
又 a＋b＋c＞0，所以|a＋b|＞|c| .
故選項(1)(2)(5)正確 .

【範例 15】

比較下列各數的大小：

(1) $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$c=\sqrt{7}+1$.

(2) $a=\sqrt{5}-2$，$b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$，$c=\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

Ans：(1) a＞b＞c，(2) a＞b＞c

【詳解】

(1) 先求各數的平方：

$$a^2=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=8+2\sqrt{15},$$

$$b^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2=8+2\sqrt{12},$$

$$c^2=\left(\sqrt{7}+1\right)^2=8+2\sqrt{7},$$

因為 $\sqrt{15}>\sqrt{12}>\sqrt{7}$，所以 $a^2>b^2>c^2$，
得三正數的大小為 $a>b>c$.

(2) 先求各數的倒數：

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2,$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5},$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\sqrt{7}+\sqrt{6} .$$

因為 $\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}>\sqrt{5}+2$，

即 $\frac{1}{c}>\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，所以 $a>b>c$ ．

【演練 15】

比較下列各數的大小： $a=\sqrt{7}-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-1$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ ．

Ans：c＜a＜b

【詳解】

先求各數的平方：

$a^2=\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2=9-2\sqrt{14}$ ，

$b^2=\left(2\sqrt{2}-1\right)^2=9-2\sqrt{8}$ ，

$c^2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2=9-2\sqrt{18}$ ，

因為 $\sqrt{18}>\sqrt{14}>\sqrt{8}$，$9-2\sqrt{18}<9-2\sqrt{14}<9-2\sqrt{8}$，

即 $c^2<a^2<b^2$，故 $c<a<b$ ．

【範例 16】

(1) 已知 a，b 是正實數且 a＋b＝16，求 ab 的最大值．

(2) 已知 a，b 是實數且 $a^2+4b^2=12$，求 ab 的範圍．

Ans：(1) 64，(2) $-3\leqq ab\leqq 3$

【詳解】

(1) 由算幾不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 得 $\frac{16}{2}\geq\sqrt{ab}$，

即 $\sqrt{ab}\leq 8\Rightarrow ab\leq 64$ ．故 ab 的最大值為 64．

(2) a^2，$4b^2$ 都是正數，由算幾不等式

$\frac{a^2+4b^2}{2}\geq\sqrt{a^2\left(4b^2\right)}$ 得 $\frac{12}{2}\geq\sqrt{4a^2b^2}$，

即 $\left|2ab\right|\leq 6\Rightarrow\left|ab\right|\leq 3$ ．故 $-3\leq ab\leq 3$ ．

【演練 16】

(1) 周長為 24 的所有矩形中，哪一種矩形的面積為最大?

(2) 面積為 24 的所有矩形中，哪一種矩形的周長為最短?

Ans：(1) 長、寬都等於 6，(2) 長、寬都等於 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

【詳解】

(1) 設矩形的長、寬分別為 a，b．

依題意 $2(a+b)=24$，即 $a+b=12$ ．

由算幾不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 知：

當 a＝b 時，ab 有最大值 ．

故當矩形的長、寬都等於 6 時，其面積最大 ．

(2) 設矩形的長、寬分別為 a，b．

依題意 ab＝24，周長為 2(a＋b)．

由算幾不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 知：

當 a＝b 時，a＋b 有最小值 ．

故當矩形的長、寬都等於 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 時，

其周長最短 ．

4. 乘法公式、分式與根式的運算

1. 平方公式：

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 【和平方公式】

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 【差平方公式】

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 【平方差公式】

(4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ ．

2. 立方公式：

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 【和立方公式】

(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 【差立方公式】

(3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 【立方和公式】

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 【立方差公式】

【範例 17】

展開下列各式：

(1) $(2a-3b)^3$。 **(2)** $(a-2b+3c)^2$。

(3) $(a+b-2)(a-b+2)$。 **(4)** $(a-5)(a+5)(a^2+5a+25)(a^2-5a+25)$.

【詳解】

(1) $(2a-3b)^3=(2a)^3-3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2-(3b)^3$

$=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$.

(2) $(a-2b+3c)^2=a^2+(-2b)^2+(3c)^2+2\cdot a\cdot(-2b)+2(-2b)(3c)+2\cdot a\cdot(3c)$

$=a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ac$.

(3) $(a+b-2)(a-b+2)=\left[a+(b-2)\right]\left[a-(b-2)\right]$

$=a^2-(b-2)^2=a^2-b^2+4b-4$.

(4) $(a-5)(a+5)(a^2+5a+25)(a^2-5a+25)$

$=\left[(a-5)(a^2+5a+25)\right]\cdot\left[(a+5)(a^2-5a+25)\right]$

$=(a^3-5^3)(a^3+5^3)=(a^3)^2-(5^3)^2$

$=a^6-5^6=a^6-15625$.

【演練 17】

展開下列各式：

(1) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b\right)^3$。

(2) $(2a-b+3)^2$。

(3) $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$。

(4) $(a^2-9)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$.

【詳解】

(1) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b\right)^3=\left(\frac{2}{3}a\right)^3+3\left(\frac{2}{3}a\right)^2\left(\frac{3}{2}b\right)+3\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{3}{2}b\right)^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^3$

$=\frac{8}{27}a^3+3\left(\frac{4}{9}a^2\right)\left(\frac{3}{2}b\right)+3\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{9}{4}b^2\right)+\frac{27}{8}b^3$

$=\frac{8}{27}a^3+2a^2b+\frac{9}{2}ab^2+\frac{27}{8}b^3$ ．

(2) $(2a-b+3)^2=(2a)^2+(-b)^2+3^2+2(2a)(-b)+2\cdot(-b)\cdot3+2\cdot3\cdot(2a)$

$=4a^2+b^2+9-4ab-6b+12a$ ．

(3) $\left(a^2+2ab+4b^2\right)\left(a^2-2ab+4b^2\right)$

$=\left(a^2+4b^2\right)^2-(2ab)^2$

$=a^4+8a^2b^2+16b^4-4a^2b^2$

$=a^4+4a^2b^2+16b^4$ ．

(4) $\left(a^2-9\right)\left(a^2+3a+9\right)\left(a^2-3a+9\right)$

$=(a-3)\left(a^2+3a+9\right)(a+3)\left(a^2-3a+9\right)$

$=\left(a^3-3^3\right)\left(a^3+3^3\right)=\left(a^3\right)^2-\left(3^3\right)^2=a^6-729$.

【範例 18】

利用乘法公式，因式分解下列各式：

(1) x^3-27 ， **(2)** $8x^3+1$ ， **(3)** $81x^4-16$ ．

【詳解】

(1) x^3-27

$=x^3-3^3$

$=(x-3)\left(x^2+x\cdot3+3^2\right)$

$=(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$ ．

(2) $8x^3+1$

$=(2x)^3+1^3$

$=(2x+1)\left[(2x)^2-2x\cdot 1+1^2\right]$

$=(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)$.

(3) $81x^4-16$

$=\left(9x^2\right)^2-4^2$

$=\left(9x^2-4\right)\left(9x^2+4\right)$

$=(3x-2)(3x+2)\left(9x^2+4\right)$.

【演練 18】

利用乘法公式，因式分解下列各式：

(1) x^3+8y^3 ， **(2)** $-8+125x^3$ ， **(3)** x^4-256 .

【詳解】

(1) x^3+8y^3

$=x^3+(2y)^3$

$=(x+2y)\left[x^2-x\cdot 2y+(2y)^2\right]$

$=(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$.

(2) $-8+125x^3$

$=(5x)^3-2^3$

$=(5x-2)\left[(5x)^2+5x\cdot 2+2^2\right]$

$=(5x-2)\left(25x^2+10x+4\right)$.

(3) $x^4-256=\left(x^2\right)^2-16^2=\left(x^2-16\right)\left(x^2+16\right)=(x-4)(x+4)\left(x^2+16\right)$.

【範例 19】

利用乘法公式，因式分解下列各式：

(1) x^6-y^6 ， **(2)** a^4+a^2+1 ．

【詳解】

(1) x^6-y^6

$=\left(x^3\right)^2-\left(y^3\right)^2$

$=\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)$

$=\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$ ．

(2) a^4+a^2+1

$=\left(a^2\right)^2+2a^2+1-a^2$

$=\left(a^2+1\right)^2-a^2$

$=\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+a+1\right)$ ．

【演練 19】

利用乘法公式，因式分解下列各式：

(1) x^6-64y^6 ， **(2)** $9x^4+5x^2+1$ ．

【詳解】

(1) x^6-64y^6

$=x^6-\left(2y\right)^6$

$=\left(x^3\right)^2-\left[\left(2y\right)^3\right]^2$

$=\left(x^3-\left(2y\right)^3\right)\left(x^3+\left(2y\right)^3\right)$

$=\left(x-2y\right)\left(x^2+2xy+4y^2\right)\left(x+2y\right)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$ ．

(2) $9x^4+5x^2+1$

$=\left(3x^2\right)^2+6x^2+1-x^2$

$=\left(3x^2+1\right)^2-x^2$

$=\left(3x^2-x+1\right)\left(3x^2+x+1\right)$.

【範例 20】

設 $x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，求下列各式的值：

(1) $x+\dfrac{1}{x}$ ， **(2)** $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ， **(3)** $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

Ans：(1) 12，(2) 142，(3) 1692

【詳解】

(1) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$

$=\dfrac{12-2\sqrt{35}+12+2\sqrt{35}}{7-5}=12$.

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=12^2-2=144-2=142$.

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=12\left(142-1\right)=1692$.

【演練 20】

設 $x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$， $y=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$，求下列各式的值：

(1) $x+y$ ， **(2)** x^2+y^2 ，**(3)** x^3+y^3 .

Ans：(1) 16，(2) 254，(3) 4048

【詳解】

(1) $x+y=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$

$=\dfrac{\left(3+\sqrt{7}\right)^2+\left(3-\sqrt{7}\right)^2}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)}$

$=\dfrac{16+6\sqrt{7}+16-6\sqrt{7}}{9-7}=\dfrac{32}{2}=16$ ．

(2) $xy=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=1$，

$x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=16^2-2=254$ ．

(3) $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=16\left(254-1\right)=4048$ ．

【範例 21】

(1) 設 $x>0$，化簡 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}$ ．

(2) 設 $x<1$，化簡 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}$ ．

Ans：(1) $x+\dfrac{1}{x}$，(2) $\dfrac{1}{x}-x$

【詳解】

(1) $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}=\sqrt{x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}=\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$，

因為 $x>0$，$x+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}=x+\dfrac{1}{x}$．

(2) $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$，

因為 $x<1$，$x-\dfrac{1}{x}<0$，所以 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=\dfrac{1}{x}-x$．

【演練 21】

已知 a，b 是正實數，化簡 $\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2+2}$.

Ans：$\frac{b^2+a^2}{ab}$

【詳解】

$$\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2+2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}\ .$$

【範例 22】

化簡下列各式：

(1) $\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$，　　**(2)** 設 $c<0$，$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}}$.

Ans：(1) $\frac{2ab}{a+b}$，(2) $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【詳解】

(1) $$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{ab}\right)}=\frac{1}{\frac{a+b}{2ab}}=\frac{2ab}{a+b}\ .$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

【演練 22】

化簡下列各式：

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$，**(2)** $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$．

Ans：(1) $\dfrac{1}{x+3}$，(2) $\dfrac{x+y}{x-y}$

【詳解】

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{(x+3)-2}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x+3}$．

(2) $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{x-y}{xy}}=\dfrac{x+y}{xy}\cdot\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{x+y}{x-y}$．

ok111ex

基礎題

1. 下列哪些數是有理數?

(1) -5，**(2)** $\sqrt{12}$，**(3)** $\sqrt{121}$，**(4)** $\pi-3$，**(5) 0.12**．

Ans：(1)(3)(5)

【詳解】

(3) $\sqrt{121}=11$ 是整數。

2. 選出正確的選項:

(1) 若 a^2 為有理數，且 a^3 為有理數，則 a 為有理數．

(2) 若 $a+b$ 與 $a-b$ 都是有理數，則 a，b 都是有理數．

(3) 若 a，b 都是無理數，則 $a+b$ 為無理數．

(4) 若 a 是有理數，b 是無理數，則 $a+b$ 為無理數．

(5) 若 a 是有理數，b 是無理數，則 ab 為無理數．

Ans：(1)(2)(4)

【詳解】

(1) $a=a^3\div a^2$ 是有理數。

(2) $a=\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)]$ 是有理數，

$b=\frac{1}{2}[(a+b)-(a-b)]$ 是有理數。

(3) $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$ 都是無理數，但 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ 為有理數。

(4) 對的。

(5) 0 是有理數，$\sqrt{2}$ 是無理數，但 $0\times\sqrt{2}=0$ 為有理數。

3. 將 $\frac{3}{7}$ 化為小數時，若小數點後第 n 位數字以 a_n 表示，則下列何者為真?

(1) $a_1=4$，**(2)** $a_2+a_4=a_5$，**(3)** $a_3=5$，**(4)** $a_2=a_8$，**(5)** $a_{28}=a_{22}$．

Ans：(1)(2)(4)(5)

【詳解】

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
 & 0 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 \\
\hline
7 & 3 & & & & & & \\
 & 3 & 0 & & & & & \\
 & \underline{2} & \underline{8} & & & & & \\
 & & 2 & 0 & & & & \\
 & & \underline{1} & \underline{4} & & & & \\
 & & & 6 & 0 & & & \\
 & & & \underline{5} & \underline{6} & & & \\
 & & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & \underline{3} & \underline{5} & & \\
 & & & & & 5 & 0 & \\
 & & & & & \underline{4} & \underline{9} & \\
 & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & & \underline{7} \\
 & & & & & & & 3
\end{array}
$$

由上式除法知

$\frac{3}{7}=0.\overline{428571}$。

$a_{6k+1}=4$，$a_{6k+2}=2$，$a_{6k+3}=8$，$a_{6k+4}=5$，$a_{6k+5}=7$，$a_{6k+6}=1$，

$k\geqq 0$，k 是整數。故

(1) $a_1=4$，

(2) $a_2+a_4=2+5=7a_5$，

(3) $a_3=8$，

(4) $a_2=2=a_8$，

(5) $a_{28}=a_4=5=a_{22}$。

4. **設，a，b 均為正整數，且** $\sqrt{7+2\sqrt{12}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}=a-\sqrt{b}$ **，求 a＋b．**

Ans：7

【詳解】

$\sqrt{7+2\sqrt{12}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

$=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$

$=2+\sqrt{3}-(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$=2-\sqrt{5}$，

a＝2，b＝5。

5. 化簡下列各式：

(1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ，

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ ，

(3) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3$.

Ans：(1) 0，(2) $2+\sqrt{2}$ ，(3) $22\sqrt{2}$

【詳解】

(1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}-\dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}+\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$

$=\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})+\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

$=0$。

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2(2+\sqrt{2})}{4-2}=2+\sqrt{2}$ 。

(3) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3$

$=(3\sqrt{3}+3\times3\sqrt{2}+3\times2\sqrt{3}+2\sqrt{2})-(3\sqrt{3}-3\times3\sqrt{2}+3\times2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

$=22\sqrt{2}$ 。

6. 因式分解下列各式：

(1) $\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y^2$ ， **(2)** $64x^3-27$ ， **(3)** x^6-64 .

Ans：(1) $(x-y)^2(x+y)^2$，(2) $(4x-3)(16x^2+12x+9)$，
(3) $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

【詳解】

(1) $\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y^2$

$=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)^2(x-y)^2$。

(2) $64x^3-27$

$=(4x)^3-3^3$

$=(4x-3)[(4x)^2+(4x)\cdot 3+3^2]$

$=(4x-3)(16x^2+12x+9)$。

(3) x^6-64

$=(x^3+8)(x^3-8)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

7. 設 $a=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{7}+2$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{5}$，下列何者正確?

(1) a＞b＞c，(2) a＜b＜c，(3) b＞a＞c，(4) a＜c＜b，(5) c＞a＞b .

Ans：(2)

【詳解】

$a=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2=8+3+4\sqrt{6}=11+4\sqrt{6}=11+2\sqrt{24}$,

$b=\sqrt{7}+2$

$\Rightarrow b^2=7+4+4\sqrt{7}=11+4\sqrt{7}=11+2\sqrt{28}$,

$c=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

$\Rightarrow c^2=6+5+2\sqrt{30}=11+2\sqrt{30}$ ，

因 $24<28<30$，故 $a<b<c$。

進階題

8. 設 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$ 之值 .

Ans：2

【詳解】

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{2}{2-\sqrt{3}+1}$$

$= \frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3} + \frac{2(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{12}{6} = 2$ 。

9. **設 x，y 為有理數，且 $x+y\sqrt{19+8\sqrt{3}} = x\sqrt{21-12\sqrt{3}} + 15\sqrt{3}$，求 x，y 的值．**

Ans：x＝–5，y＝5

【詳解】

$x+y\sqrt{19+8\sqrt{3}} = x\sqrt{21-12\sqrt{3}} + 15\sqrt{3}$

$\Rightarrow x+y\sqrt{19+2\sqrt{48}} = x\sqrt{21-2\sqrt{108}} + 15\sqrt{3}$

$\Rightarrow x+y(\sqrt{16}+\sqrt{3}) = x(\sqrt{12}-\sqrt{9}) + 15\sqrt{3}$

$\Rightarrow x+y(4+\sqrt{3}) = x(2\sqrt{3}-3) + 15\sqrt{3}$

$\Rightarrow x+4y+3x=0$，$y-2x-15=0$

$\Rightarrow x=-y$，$2x-y+15=0$

$\Rightarrow -3y+15=0$

$\Rightarrow y=5$

$\Rightarrow x=-5$。

即 x＝–5，y＝5。

10. **設 x 為有理數，且 $(x^2-4)+(x^2-x-6)\sqrt{3}=0$，求 x 之值。**

Ans：–2

【詳解】

由（x^2-4）+（x^2-x-6）$\sqrt{3}=0$

得 $\begin{cases} x^2-4=0\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-x-6=0\cdots(2) \end{cases}$

由(1)得（$x+2$）（$x-2$）＝0，故 $x=-2$ 或 2，

由(2)得（$x+2$）（$x-3$）＝0，故 $x=-2$ 或 3，

於是 $x=-2$。

11. **設 $\sqrt{11+\sqrt{72}}=a+b$，其中 a 為正整數，$0\leq b<1$，求 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2-b}$ 的值．**

Ans：**$\frac{6}{7}$**

【詳解】

$\sqrt{11+\sqrt{72}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}$，得 a＝4，b＝$\sqrt{2}$－1。

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2-b}=\frac{1}{3+\sqrt{2}}+\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}{9-2}=\frac{6}{7}$。

12. 設 **n** 是自然數，若 $\frac{n}{9}\le\sqrt{11}\le\frac{n+1}{9}$，求 **n** 之值。

Ans：29

【詳解】

$\frac{n}{9}\le\sqrt{11}\le\frac{n+1}{9}$

$\Rightarrow$ n≦$9\sqrt{11}$≦n＋1

$\Rightarrow$ n≦9×3.316＝29.8496≦n＋1

$\Rightarrow$ n＝29。

13. 設 $a=\sqrt{159-24\sqrt{15}}$，試問 a 在哪兩個連續整數之間？

Ans：8 與 9 之間

【詳解】

$a=\sqrt{159-24\sqrt{15}}$

$=\sqrt{12^2-2\cdot12\cdot\sqrt{15}+(\sqrt{15})^2}$

$=\sqrt{(12-\sqrt{15})^2}$

＝12－$\sqrt{15}$，

因 3＜$\sqrt{15}$＜4，故 8＜12－$\sqrt{15}$＜9，

於是 a 介於 8 與 9 之間。

14. 設 **a**，**b**，**x**，**y** 均為正整數，**a**＞**b**，**x**＞**y**，比較下列兩組數的大小．

(1) $\frac{a}{b},\frac{a+x}{b+x},\frac{a+y}{b+y}$．　**(2)** $\frac{b}{a},\frac{b+x}{a+x},\frac{b+y}{a+y}$．

Ans：(1) $\frac{a}{b}>\frac{a+y}{b+y}>\frac{a+x}{b+x}$，(2) $\frac{b}{a}<\frac{b+y}{a+y}<\frac{b+x}{a+x}$

【詳解】

(1) $\frac{a}{b}-\frac{a+y}{b+y}=\frac{a(b+y)-b(a+y)}{b(b+y)}=\frac{ay-by}{b(b+y)}=\frac{(a-b)y}{b(b+y)}>0$，

故 $\frac{a}{b}>\frac{a+y}{b+y}$。

$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a+y}{b+y}=\frac{(a+x)(b+y)-(a+y)(b+x)}{(b+x)(b+y)}$

$=\frac{(ab+ay+bx+xy)-(ab+ax+by+xy)}{(b+x)(b+y)}$

$=\frac{ay+bx-ax-by}{(b+x)(b+y)}=\frac{(a-b)y-(a-b)x}{(b+x)(b+y)}=\frac{(a-b)(y-x)}{(b+x)(b+y)}<0$，

故 $\frac{a+y}{b+y}>\frac{a+x}{b+x}$。

由上得 $\frac{a}{b}>\frac{a+y}{b+y}>\frac{a+x}{b+x}$。

(2) 由(1)取倒數得 $\frac{b}{a}<\frac{b+y}{a+y}<\frac{b+x}{a+x}$。

15. 證明：若 a，b 均為無理數，則 a＋2b，2a－b 兩數中至少有一個是無理數．

【證明】

若 a＋2b，2a－b 都是有理數

⇒ (a＋2b)＋2(2a－b)＝5a 是有理數

⇒ a 是有理數，矛盾，

故 a＋2b，2a－b 兩數中至少有一個是無理數。

16. $\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}+1}$ 等於下列哪一個選項？

(1) 1.01，(2) 1.05，(3) 1.1，(4) 1.15，(5) 1.21。 [學測 101]

Ans：(2)

【詳解】

$\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}+1}=\sqrt{0.04+0.0625+1}=\sqrt{1.1025}$

$=\sqrt{(1+0.05)^2}=1.05$

故選(2)

17. 令 **a**＝ $2.6^{10}-2.6^{9}$ ，b＝ $2.6^{11}-2.6^{10}$ ，c＝ $\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}$ 。

請選出正確的大小關係。 (bc102)

(1) a＞b＞c，(2) a＞c＞b，(3) b＞a＞c，(4) b＞c＞a，(5) c＞b＞a

Ans：(4)

【詳解】

$2a-2c=2.6^{9}(2\times2.6-2-2.6^{2}+1)<0$，故 $a<c$。

$2b-2c=2.6^{9}(2\times2.6^{2}-2\times2.6-2.6^{2}+1)\fallingdotseq2.56>0$，故 $b>c$，

故得 $b>c>a$。

k=	2.6	9	10	11		
y=		5429.50368	14116.7096	36703.4449		
a=	8687.20589	b=	22586.7353	c=	15636.9706	

18. 設 **k** 為一整數。已知 $\dfrac{k}{3}<\sqrt{31}<\dfrac{k+1}{3}$ ，則 k＝_____。(bc102)

Ans：16

【詳解】

$\dfrac{k}{3}<\sqrt{31}<\dfrac{k+1}{3}$

$\Rightarrow k<3\sqrt{31}<k+1$

$\Rightarrow k<3\times5.57=16.71<k+1$

取 $k=16$。

19. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13}>3.5$，**(2)** $\sqrt{13}<3.6$，**(3)** $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$ ，

(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ ，**(5)** $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$。 **(bc103)**

Ans：(1)(4)

【詳解】

$\sqrt{13}=3.605$， $\sqrt{3}=1.732$，

直接計算知(1)(4)正確

【另解】

(1) $3.5^{2}=12.25$，故 $\sqrt{13}>3.5$.

(2) $3.6^2 = 12.96$，故 $\sqrt{13} > 3.6$.

(3) $(\sqrt{13}-\sqrt{3})^2 = 13+3-2\sqrt{39} < 4 < 10$.

(4) $(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2 = 13+3+2\sqrt{39} > \sqrt{16}$.

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{13-3} = \dfrac{\sqrt{13+3+2\sqrt{39}}}{10} < \dfrac{\sqrt{16+14}}{10} < 0.6$.