選修數學 進階講義 上

複數平面

大同高中·陳盈穎老師

信望愛文教基金會

16-3-1 複數平面

定理敘述

1.複數平面

令 x 軸為實數軸，y 軸為虛數軸。則任意一個複數均可在 x，y 軸形成之平面上，找到一對應的坐標點，稱此平面為複數平面。

例：$1-2i \Leftrightarrow (1,-2)$ 、$-2i \Leftrightarrow (0,-2)$ 、$1 \Leftrightarrow (1,0)$

2.複數的絕對值

若 $z=a+bi$，$a,b\in R$，則 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 稱為 z 的絕對值（即複數平面上 z 到原點距離）

若 z_1 、z_2 均為複數，則

(1) $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

(2) 若 $z_2\neq 0$，則 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(3) $|z_1^n|=|z_1|^n$

(4) $|z_1|=|\overline{z_1}|$

(5) $|z_1|^2=z_1\times\overline{z_1}$

(6) $|z_1|=1\Leftrightarrow z_1\times\overline{z_1}=1\Leftrightarrow z_1=\dfrac{1}{\overline{z_1}}$

定理證明或說明

若 z_1 、z_2 均為複數，假設 $z_1=a+bi$ 、$z_2=c+di$，則：

(1) $|z_1\times z_2|=|(a+bi)(c+di)|=|(ac-bd)+(ad+bc)i|$

$$=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

$$=|z_1|\times|z_2|$$

(2) $z_2 \neq 0, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

其中 $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{c+di}\right| = \left|\frac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \sqrt{(\frac{c}{c^2+d^2})^2 + (\frac{-d}{c^2+d^2})^2} = \sqrt{\frac{1}{c^2+d^2}} = \frac{1}{|z_2|}$

(3) $|z_1^n| = |z_1 \times z_1 \times \ldots \times z_1| = |z_1| \times |z_1| \times \ldots \times |z_1| = |z_1|^n$

(4) $|z_1| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |\overline{z_1}|$

(5) $z_1 \times \overline{z_1} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z_1|^2$

(6) $|z_1| = 1 \Leftrightarrow z_1 \times \overline{z_1} = 1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{\overline{z_1}}$

關鍵字

實軸、虛軸、複數、複數平面

例題 1

$\left|\frac{(3+4i)^2(3-4i)^3}{(1-2i)^3(2+i)^2}\right| =$ __________

Ans： $25\sqrt{5}$

解： $\left|\frac{(3+4i)^2(3-4i)^3}{(1-2i)^3(2+i)^2}\right| = \frac{|3+4i|^2|3-4i|^3}{|1-2i|^3|2+i|^2} = \frac{5^2 \times 5^3}{\sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^2} = 25\sqrt{5}$

例題 2

複數平面上，若一圓以原點為圓心、半徑為 2，則下列哪些複數在此圓上？

(A) $-3+i$ (B) $1+i$ (C) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ (D) $-2i$ (E) $2\sin 2\pi + 2i\cos 2\pi$

Ans：(A)(D)

解： $|-3+i| = 2$ ， $|1+i| = \sqrt{2}$ ， $|\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}| = 1$ ， $|-2i| = 2$ ， $|2\sin 2\pi + 2i\cos 2\pi| = 2\sqrt{2}$

故選(A)(D)

例題 3

複數 z_1 、 z_2 在複數平面上分別表 A 、 B 兩點， O 為原點，且 $|z_1|=3$ 、 $|z_2|=4$ ， $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$ ，試求 ΔOAB面積 = ____________

Ans： $3\sqrt{3}$

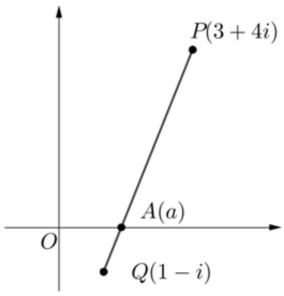
解： $|z_1|=3\Rightarrow \overline{OA}=3$ ， $|z_2|=4\Rightarrow \overline{OB}=4$

所求 ΔOAB面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

例題 4

若 $a\in R$ ，則 $|a-(3+4i)|+|a-(1-i)|$ 的最小值為____________ ，此時 $a=$ ____________

Ans： $\sqrt{29}$ ； $a=\dfrac{7}{5}$



解：設複數平面上 $P(3+4i)$ ， $Q(1-i)$ ， $A(a)$

所求 $|a-(3+4i)|+|a-(1-i)|=\overline{PA}+\overline{QA}\geq \overline{PQ}=\sqrt{29}$

此時 $a=\dfrac{7}{5}$

例題 5

$z^2=(3+4i)^4(-1-\sqrt{3}i)^2\Rightarrow |z|=$ ____________

Ans：50

解： $|z|^2=|z^2|=|(3+4i)^4(-1-\sqrt{3}i)^2|=5^4\times 2^2$ ，得 $|z|=50$

例題 6

設 z 為一複數，且 $\dfrac{z-2i}{z+2i}=i$ 。試問 z 的絕對值 $|z|=$ ____________

Ans：2

解： $\dfrac{z-2i}{z+2i}=i\Rightarrow z=\dfrac{2i-2}{1-i}=-2$ ，故所求為 2

溫故知新

習題 1

若複數 $z=\dfrac{(3+4i)^5}{(1-2i)^{10}}$，則$|z^{100}|=$__________

習題 2

複數平面上，下列哪些複數在以原點為圓心之單位圓上？

(A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $1+i$ (C) $\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ (D) $-i$ (E) $\sin 2\pi+i\cos 2\pi$

習題 3

複數 z_1 、 z_2 在複數平面上分別表 A 、 B 兩點，O 為原點，且$|z_1|=3$ 、$|z_2|=4$ ，$|z_1-z_2|=5$ ，試求 ΔOAB面積$=$__________

習題 4

若 a 為一複數，則$|a+5-12i|+|a|$的最小值為__________

習題 5

$z^4=(3+4i)^4(-1-\sqrt{3}i)^2 \Rightarrow |z|=$__________

習題 6

設 z 為一複數，且 $z-2i=i(z+2)$。求 z 的絕對值$|z|=$__________

習題 7 【指考甲 102】

設 z 為一複數，且 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$（其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位）。試問 z 的絕對值$|z|$為下列哪一個選項？(1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (4) $\sqrt{2}$ (5) 2

習題 8 【指考甲 96】

設 $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，試問複數 $1-z$ 的絕對值為以下哪一選項？

(1) $2\sin\frac{\pi}{7}$ (2) $\sin\frac{2\pi}{7}$ (3) $\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{7}$ (4) $\sqrt{2}(1-\cos\frac{2\pi}{7})$ (5) $\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{7}}$

習題 9 【學測 96】

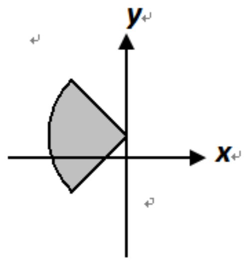
若 $\Gamma=\{z\mid z$為複數且$|z-1|=1\}$，則下列哪些點會落在圖形 $\Omega=\{w\mid w=iz,\ z\in\Gamma\}$ 上?

(1) $2i$ (2) $-2i$ (3) $1+i$ (4) $1-i$ (5) $-1+i$

習題 10 【學測 93】

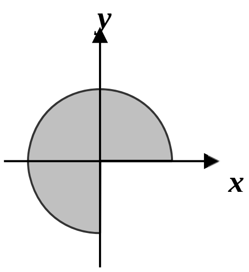
右圖陰影部分所示為複數平面上區域

$A=\{z: z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ 0\le r\le 1,\ \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\}$ 之略圖。

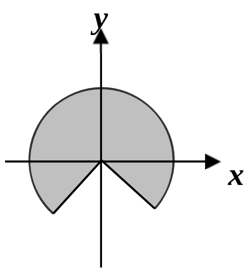


令 $D=\{w: w=z^3, z\in A\}$，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近？

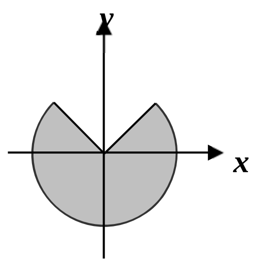
(1)



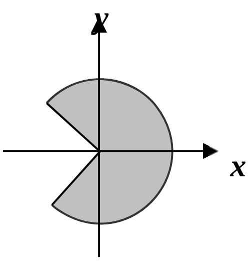
(2)



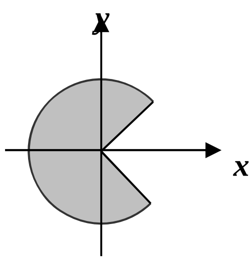
(3)



(4)



(5)



習題 11 【指考甲 94】

令 $i=\sqrt{-1}$，$\bar{z}$ 表複數 z 的共軛複數。在複數平面上，所有滿足方程式 $(1+i)z-(1-i)\bar{z}=0$ 的複數 z，會形成下列哪種的圖形？(1)一點 (2)一圓 (3)一直線 (4)兩直線

習題 12 【學測 95】

設一元二次整係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有一根為 $4+3i$。若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積為

(1) 5 (2) 6 (3) 12 (4) 16 (5) 24

解答與解析

習題 1：1

習題 2：(A)(C)(D)(E)

習題 3：6

習題 4：13

習題 5：$5\sqrt{2}$

習題 6：$2\sqrt{2}$

習題 7：(5)

解：$\dfrac{z-2}{z+2}=i \Rightarrow z=\dfrac{2+2i}{1-i}$，得 $|z|=\dfrac{|2+2i|}{|1-i|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$，故選(5)

習題 8：(1)

解：$1-z=(1-\cos\dfrac{2\pi}{7})-i\sin\dfrac{2\pi}{7}$

$$\Rightarrow |1-z| = \sqrt{(1-\cos\frac{2\pi}{7})^2+\sin^2\frac{2\pi}{7}} = \sqrt{\cos^2\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}+1+\sin^2\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{7}} = \sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi}{7})} = \sqrt{2(2\sin^2\frac{\pi}{7})} = 2\sin\frac{\pi}{7}$$

故選(3)

習題 9：(1)(3)(5)

解：依據題意得：若 $w\in\Omega$，則 $\dfrac{w}{i}\in\Gamma$ (即 $|\dfrac{w}{i}-1|=1$)

(1) $|\dfrac{2i}{i}-1|=1$

(2) $|\frac{-2i}{i}-1|=3\neq 1$

(3) $|\frac{1+i}{i}-1|=|-i+1-1|=1$

(4) $|\frac{1-i}{i}-1|=|-i-1-1|=\sqrt{5}\neq 1$

(5) $|\frac{-1+i}{i}-1|=|i+1-1|=1$

故選(1)(3)(5)

習題 10：(5)

解：若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

因為 $\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{4}$，所以 $\frac{9\pi}{4}\leq 3\theta\leq\frac{15\pi}{4}$

故選(5)

習題 11：(3)

解：設 $z=x+yi$

$\Rightarrow (1+i)z-(1-i)\overline{z}=(1+i)(x+yi)-(1-i)(x-yi)=0$

$\Rightarrow x+yi+xi-y-x+yi+xi+y=0$

$\Rightarrow x+y=0$，所以形成之圖形為一直線

故選(3)

習題 12：(3)

解：整係數一元二次方程式之兩根，

若其中一根為複數，則另一根為其共軛複數。

得兩根為 $4+3i$ 、 $4-3i$ ，其在複數平面上代表之點為 $(4,3)$ 、 $(4,-3)$

所求面積為 12 ，故選(3)