

數學 2

進階
講義

古典機率的定義與性質

景美女中 · 莊嘉銘 老師



信望愛文教基金會



6-2-1&6-2-2 古典機率的定義與性質

定理證明或說明

1. 定義

設一個事件 A 有 k 個元素，而樣本空間 S 有 n 個元素，若每個元素出現的機會均等，則此事件 A 發生的機率就是 $\frac{k}{n}$ ，寫成 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k}{n}$ 。

2. 性質

設樣本空間為 U ， A, B 為兩事件，則：

(1) 標準化：必然發生的事件機率為1（即 $P(S) = 1$ ）

必然不會發生的事件機率為0（即 $P(\phi) = 0$ ）

(2) 機率的範圍：每一個事件發生的機率必在0和1之間。（即 $0 \leq P(A) \leq 1$ ）

(3) 加法性：若 A, B 為互斥事件，則事件 A, B 至少有一件發生的機率，等於兩事件發生機率的和。（即 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ）

(4) 餘事件：若 A' 為事件 A 的餘事件，則 $P(A') = 1 - P(A)$ 。

3. 排容原理

設樣本空間為 S ， A, B, C 為事件，則：

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(2) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

關鍵字

機率

例題 1

設一袋中含 5 黑球，3 紅球，2 白球，則自袋中任取出二球，則其為一黑一紅之機率為何？

Ans :

樣本空間為 10 球取兩球，故 $n(S) = C_2^{10} = 45$

所求為一黑一紅的事件，故 $n(A) = C_1^5 \times C_1^3 = 15$

$$\text{所以 } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

例題 2

有大小尺寸不同之鞋五雙，從其中任取四隻，試求以下之機率：

(1) 恰為兩雙。(2) 四隻均不成雙。

Ans :

樣本空間為 10 隻鞋取四隻，故 $n(S) = C_4^{10} = 210$

$$(1) P(A) = \frac{C_2^5}{C_4^{10}} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$$

(2) 四隻皆不成雙，即此四隻來自不同的四雙鞋，且只取左或右腳

$$\text{故 } n(B) = C_4^5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

$$\text{所以 } P(B) = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

例題 3

擲二公正骰子，試求其點數和為 3 或 5 之倍數之機率。

Ans :

$n(S) = 6 \times 6 = 36$ 點數和為 3 或 5 之倍數有 3, 5, 6, 9, 10, 12

$$\text{所以 } n(A) = 2 + 4 + 5 + 4 + 3 + 1 = 19 \text{ 所求為 } \frac{19}{36}$$

例題 4

設大門上鎖之機率為 0.5，現有 7 支鑰匙，其中僅有 1 支能開此大門鎖，若從此 7 支中任取 3 支前往開此大門，則能打開此大門的機率為何？

Ans：

此題分兩種情況，未上鎖與上鎖，故開門的機率為

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^6 \times C_1^1}{C_3^7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{35} = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

例題 5

一袋中有 3 白球，4 紅球，2 黑球，設每一球被取到的機會均等，試求以下事件之機率：

- (1) 任取 4 球恰含 3 紅球。
- (2) 任取 4 球至少有一黑球。
- (3) 每次取一球，取後放回連取 4 次恰含 3 紅球。
- (4) 每次取一球不放回，則第 2 次取到白球機率為_____。

Ans：

$$n(S) = C_4^9 = 126$$

$$(1) n(A) = C_3^4 \times C_1^5 = 20, \text{ 故 } P(A) = \frac{20}{126} = \frac{10}{63}$$

$$(2) P(\text{至少一黑球}) = 1 - P(\text{沒有黑球}) = 1 - \frac{C_4^7}{126} = 1 - \frac{35}{126} = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

$$(3) \text{ 所求為 } 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{1280}{6561}$$

$$(4) \text{ 所求為 } P(\text{黑白}) + P(\text{紅白}) + P(\text{白白}) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

(另解：第 2 次取到白球之機率等於第 1 次取到白球之機率，即 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$)

例題 6

一副撲克牌 52 張中任取 5 張牌，則：

- (1) *Full house* 即 (*xxx yy*) 之機率為_____。
- (2) *Two pairs* 即 (*xx yyz*) 之機率為_____。

Ans :

$$n(S) = C_5^{52}$$

(1) 先選擇點數再選擇花色，故 $P(A) = \frac{C_2^{13} \times 2! \times C_3^4 \times C_2^4}{C_5^{52}} = \frac{6}{4165}$

(2) $P(B) = \frac{C_3^{13} \times C_2^3 \times C_2^4 \times C_2^4 \times C_1^4}{C_5^{52}} = \frac{1188}{4165}$



習題 1

丟一個硬幣 4 次，觀察正面及反面出現的次序：

- (1) 四次均是正面的機率為何？ (2) 至少出現一次正面的機率為何？
- (3) 出現兩正面、兩反面的機率為何？

習題 2

甲、乙、丙三人猜拳，各出剪刀、布、石頭三者之一，今三人同時猜一拳，求：

- (1) 不能決定勝負之機率為何？ (2) 僅甲獲勝之機率為何？

習題 3

某次數學競試，共有十題三選一的單選題，對一題 10 分，錯一題倒扣 5 分，不作不給分。某甲對其中某七題十分有信心，必可得分，而另三題決定亂猜作答，則甲得分為 80 分以上的機率為何？

習題 4

投擲三公正骰子，則出現點數最大者為 5 之機率為何？

習題 5

某工廠生產燈泡，10 個裝成一盒，工廠檢驗方法是每盒中任取 3 個來檢查，若有兩個或兩個以上的燈泡是壞的，則整盒淘汰，若某一盒有 4 個壞燈泡，則這一盒被淘汰的機率為何？

習題 6

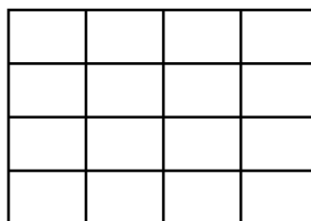
【學測 92】

金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率為_____。

習題 7

【學測 95】

在右圖的棋盤方格中，隨機任意取兩個格子，選出的兩個格子不在同行(有無同列無所謂)的機率為何？



- (1) $\frac{1}{20}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{4}{5}$

習題 8

【學測 98】

甲、乙、丙三所高中的一年級分別有 3、4、5 個班級。從這 12 個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的 11 個班級中隨機選取一班參加英文抽考。則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？

- (1) 21% (2) 23% (3) 25% (4) 27% (5) 29%

袋中有七個白球，若干個黑球。今從袋中一次取出兩個球，已知此兩球同為白球的機率是 $\frac{7}{22}$ 。請問袋中有幾個黑球？



習題 1：(1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{15}{16}$ (3) $\frac{3}{8}$

【詳解】 $n(S) = 2^4 = 16$

(1) 四次均是正面只有 $(+, +, +, +)$ 一種 \therefore 機率為 $\frac{1}{16}$

(2) ①正面思考：至少出現一次正面有

$\{(+, +, +, +), (+, +, +, -), (+, +, -, +), \dots, (-, -, -, +)\}$ 共 15 種

\therefore 機率為 $\frac{15}{16}$

②反面思考：至少出現一次正面可視為全部減去四次均反面

\therefore 機率為 $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(3) $n(\text{兩正兩反}) = C_2^4 = 6$ \therefore 機率為 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

習題 2： $n(S) = 3^3 = 27$

【詳解】(1) 平手的狀況有：三人均同或三人均不同所以 $n(A) = 3 + 3! = 3 + 6 = 9$

$\therefore P(A) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

(2) 只有甲獲勝的狀況為：(刀，布，布)、(石，刀，刀)、(布，石，石) 共三種

$$\therefore P(\text{只有甲勝}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

習題 3 : $\frac{7}{27}$

【詳解】甲已有 70 分，故若為 80 分以上，剩下三題的狀況需為：全對及只錯一題

$$\text{故所求機率為：} P(\text{全對}) + P(\text{只錯一題}) = \frac{1}{3^3} + \frac{C_1^3 \times 2}{3^3} = \frac{1+3 \times 2}{27} = \frac{7}{27}$$

(只錯一題的方法：三題錯一題且錯誤選項有兩個 = $C_2^3 \times 2 = 6$)

習題 4 : $\frac{61}{216}$

【詳解】 $n(S) = 6^3 = 216$

$$\text{所求為 } P(\text{擲出 } 1 \sim 5) - P(\text{擲出 } 1 \sim 4) = \frac{5^3}{216} - \frac{4^3}{216} = \frac{125-64}{216} = \frac{61}{216}$$

習題 5 : $\frac{1}{3}$

【詳解】 $n(S) = C_3^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$

$\therefore P(\text{被淘汰}) = P(\text{3個全壞}) + P(\text{兩壞一好})$

$$= \frac{C_3^4}{120} + \frac{C_2^4 \times C_1^6}{120} = \frac{4+36}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

習題 6 : $\frac{1}{12}$

【詳解】 $P = \frac{1}{\frac{4!}{2!}} = \frac{1}{12}$

習題 7 : (5)

$$\text{【詳解】 } n(S) = C_2^{16} = \frac{16 \times 15}{2!} = 120$$

$$n(A) = \frac{16 \times 12}{2} = 96 \text{ (因為每一個格子除了同行外均有12個格子可選)}$$

$$\therefore P = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

習題 8 : (5)

$$\text{【詳解】 } n(S) = 12 \times 11 = 132$$

$$n(A) = 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 = 38$$

$$\therefore P(A) = \frac{38}{132} = \frac{19}{66} \approx 28.8\%$$

故選(5)

習題 9 : 5

$$\text{【詳解】 設有 } x \text{ 個黑球} \Rightarrow n(S) = C_2^{7+x} = \frac{(7+x)(6+x)}{2}$$

$$\therefore P(\text{兩白球}) = \frac{7}{22} = \frac{C_2^7}{\frac{(7+x)(6+x)}{2}} = \frac{2 \times \frac{7 \times 6}{2!}}{(7+x)(6+x)} = \frac{42}{(7+x)(6+x)}$$

$$\therefore 132 = (7+x)(6+x) = x^2 + 13x + 42$$

$$\Rightarrow x^2 + 13x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow (x+18)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ 或 } -18 \text{ (不合)}$$