

數學 1 進階講義

無理數

景美女中 · 林志強老師



信望愛文教基金會



1-2 無理數



- 1.實數中，不是有理數的數稱為無理數。
- 2.無理數只能化為不循環的無限小數。
- 3.兩個無理數的加、減、乘、除所得的數，不一定為無理數。
- 4.設 a 、 b 、 c 、 d 為有理數， $\sqrt{x}$ 為無理數，若 $a+b\sqrt{x}=c+d\sqrt{x}$ ，則 $a=c$ ， $b=d$ 。
- 5.設 $a \geq 0$ ， $b \geq 0$

$$(1) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$(2) \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$(3) \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$(4) \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (\text{此時 } a \geq b)$$

$$6. \text{對於任意實數 } x, \text{ 恆有 } \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

例題 1

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{75} \quad (2) 5\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{12} + 3\sqrt{20} \quad (3) (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \quad (4) \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(5) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

例題 2

設 a, b 為二有理數，滿足 $(2-3\sqrt{2})a + (4+2\sqrt{2})b = -2-13\sqrt{2}$ ，求 a, b 之值

例題 3

試比較下列各數大小的關係

(1) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ 與 $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ (2) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ 與 $\sqrt{8} - \sqrt{3}$

例題 4

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ (2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ (3) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ (4) $\sqrt{7-\sqrt{48}}$

例題 5

試判斷在哪兩個連續整數之間？

(1) $\sqrt{10+\sqrt{47}}$ (2) $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$

例題 6

已知 $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，求 $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b}$ 的值

例題 7

若一正數 a 之小數部分為 b ，且 $a^2 + b^2 = 38$ ，求 $a + b$

例題 8

選出正確的選項：

- (1) 若 a, b 都是無理數，則 $a + b$ 為無理數
- (2) 若 a, b 都是無理數，則 ab 為無理數
- (3) 若 a 為有理數， b 是無理數，則 $a + b$ 為無理數
- (4) 若 a 為有理數， b 是無理數，則 ab 為無理數
- (5) 若 $a - b, a + b$ 都是有理數，則 a, b 為有理數



解答與解析

例題 1：(1) $5\sqrt{3}$ (2) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ (3) 16 (4) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (5) $5 + 2\sqrt{6}$

解析：(1) $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$$(2) 5\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{12} + 3\sqrt{20} = 5\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + 2\sqrt{3} + 6\sqrt{5} = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$$

$$(3) (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 16$$

$$(4) \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$(5) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

例題 2 : $a = 3, b = -2$

解析 : $(2 - 3\sqrt{2})a + (4 + 2\sqrt{2})b = -2 - 13\sqrt{2}$

$$\Rightarrow 2a - 3a\sqrt{2} + 4b + 2b\sqrt{2} = -2 - 13\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (2a + 4b) + (-3a + 2b)\sqrt{2} = -2 - 13\sqrt{2}$$

因為 $2a + 4b$ 及 $-3a + 2b$ 均為有理數

$$\text{所以} \begin{cases} 2a + 4b = -2 \\ -3a + 2b = -13 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -2$$

例題 3 : (1) $\sqrt{6} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{7} - \sqrt{2} > \sqrt{8} - \sqrt{3}$

解析 : (1) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 = 9 + 2\sqrt{14}$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = 9 + 2\sqrt{18}$$

$$\text{因為 } (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 > (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$$

$$\text{所以 } \sqrt{6} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

$$(2) \sqrt{7} - \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{8} - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{8} + \sqrt{3}}$$

$$\text{因為 } \sqrt{8} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

$$\text{所以 } \frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} > \frac{5}{\sqrt{8} + \sqrt{3}}$$

$$\text{即 } \sqrt{7} - \sqrt{2} > \sqrt{8} - \sqrt{3}$$

例題 4 : (1) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2} - 1$ (3) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (4) $2 - \sqrt{3}$

解析 : (1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5 \times 2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

$$(2) \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(2+1)-2\sqrt{2 \times 1}} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$(3) \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{(6+2)+2\sqrt{6 \times 2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$(4) \sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{(4+3)-2\sqrt{4 \times 3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

例題 5 : (1) 4 與 5 之間 (2) 3 與 4 之間

解析 : (1) $6 < \sqrt{47} < 7 \Rightarrow 16 < 10 + \sqrt{47} < 17 \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{10 + \sqrt{47}} < \sqrt{17}$

$$\Rightarrow \sqrt{10 + \sqrt{47}} \text{ 在 } 4 \text{ 與 } 5 \text{ 之間}$$

$$(2) \sqrt{41-12\sqrt{5}} = \sqrt{41-2\sqrt{180}} = \sqrt{(36+5)-2\sqrt{36 \times 5}} = \sqrt{36} - \sqrt{5} = 6 - \sqrt{5}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 < 6 - \sqrt{5} < 4 \Rightarrow \sqrt{41-12\sqrt{5}} \text{ 在 } 3 \text{ 與 } 4 \text{ 之間}$$

例題 6 : -1

解析 : $\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3 \times 1}} = \sqrt{3} + 1$

$$\text{因為 } 2 < \sqrt{3} + 1 < 3$$

$$\text{所以 } a = 2 \Rightarrow b = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = -1$$

例題 7 : $2\sqrt{10}$

解析 : 因為 $0 < b < 1 \Rightarrow 0 < b^2 < 1$

$$\text{所以 } 37 < a^2 < 38 \Rightarrow 6 < a < 7 \Rightarrow a \text{ 之整數部分為 } 6$$

$$\text{可令 } a = 6 + b$$

$$a^2 + b^2 = 38 \Rightarrow (6+b)^2 + b^2 = 38 \Rightarrow b^2 + 6b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -3 \pm \sqrt{10} \text{ (負不合)} \quad \text{故 } b = -3 + \sqrt{10}$$

$$\text{故 } a + b = 6 + 2b = 6 + 2(-3 + \sqrt{10}) = 2\sqrt{10}$$

例題 8 : (3)(5)

解析 : (1) 不一定，例如 $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$

(2) 不一定，例如 $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$

(4) 不一定，例如 $a = 0$, $b = \sqrt{2}$

(5) 因為 $a - b$, $a + b$ 都是有理數

所以 $a = \frac{(a-b)+(a+b)}{2}$ 及 $b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2}$ 都是有理數