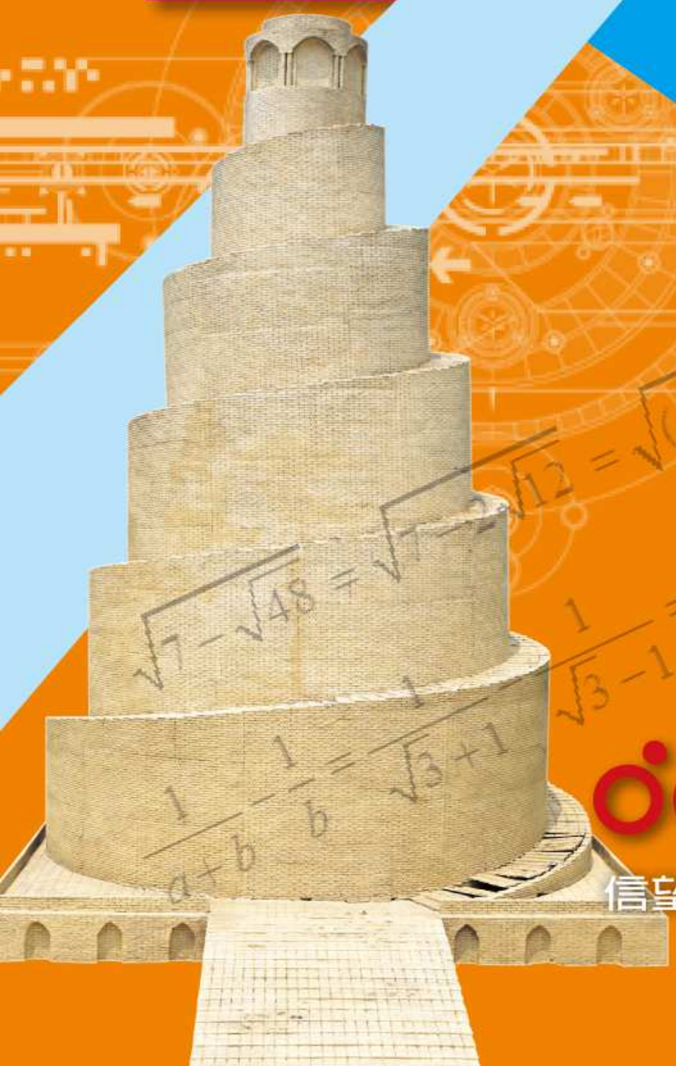
數學 2

進階講義

二項式定理

淡水商工・姚盈孜　老師



信望愛文教基金會

5-4-2　二項式定理

定理敘述

1. 二項式定理：

　對任意正整數 n，

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y^1 + \cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots + C_{n-1}^n x^1 y^{n-1} + C_n^n y^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r\end{aligned}$$ 。

2. $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \cdots + C_n^n x^n$ ，

3. 設 n 為正整數，則

　(1) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$ 。

　(2) $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots + C_q^n = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots + C_p^n = 2^{n-1}$ 。

　　（q 為不大於 n 的最大偶數；p 為不大於 n 的最大奇數）

4. 巴斯卡三角形：如下圖，

　左右相鄰的兩數相加等於此兩數下方之數，

　例： $4+6=10$ ，

　而每一橫排之數，恰為 $(x+y)^n$ 展開後之係數。

	展開後係數	1
$(x+y)^1$	$\longrightarrow$	1　1
$(x+y)^2$	$\longrightarrow$	1　2　1
$(x+y)^3$	$\longrightarrow$	1　3　3　1
$(x+y)^4$	$\longrightarrow$	1　4　6　4　1
$(x+y)^5$	$\longrightarrow$	1　5　10　10　5　1
$\vdots$		$\vdots$

定理證明或說明

1. 二項式定理：

說明：

將$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$展開時，是將 3 個括號中，各挑一個 x 或 y 出來相乘，例：$(x+y)(x+y)(x+y)$ 得 x^2y ，$(x+y)(x+y)(x+y)$ 得 $xyx=x^2y$ 。將$(x+y)^3$全部展開後得到 $xxx+xxy+xyx+yxx+xyy+yxy+yyx+yyy$ ，經同類項合併後可得$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ ，注意：

(1) 因總共有 3 個括號，因此共取 3 個文字符號，故 x 的次方與 y 的次方和為 3。

(2) x^2y 的係數為 3，是因 xxy, xyx, yxx 共 3 個，代表 3 括號中 2 個取 x，1 個取 y，故 x^2y 的係數為 C_2^3（3 括號中 2 個取 x）。

考慮$(x+y)^n$的展開式：

(1) 因共有 n 個括號，故展開後有 $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, x^{n-r}y^r, \cdots, xy^{n-1}, y^n$ 等項。

(2) $x^{n-r}y^r$ 的係數為 C_r^n（n 括號中取 r 個 x）。

故 $(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y^1+\cdots+C_r^nx^{n-r}y^r+\cdots+C_{n-1}^nx^1y^{n-1}+C_n^ny^n$ 。

用數學歸納法證明二項式定理：

①當 $n=1$ 時，$(x+y)^1=x+y=C_0^1x+C_1^1y$ ，成立。

②設 $n=k$ 成立，即 $(x+y)^k=C_0^kx^k+C_1^kx^{k-1}y+\cdots+C_{k-1}^kxy^{k-1}+C_k^ky^k$ ，

則 $n=k+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{k+1}&=(C_0^kx^k+C_1^kx^{k-1}y+\cdots+C_{k-1}^kxy^{k-1}+C_k^ky^k)(x+y)\\
&=C_0^kx^{k+1}+C_1^kx^ky+\cdots\cdots+C_{k-1}^kx^2y^{k-1}+C_k^kxy^k\\
&\qquad+C_0^kx^ky+C_1^kx^{k-1}y^2+\cdots\cdots+C_{k-1}^kxy^k+C_k^ky^{k+1}\\
&=C_0^kx^{k+1}+(C_1^k+C_0^k)x^ky+(C_2^k+C_1^k)x^{k-1}y^2+\cdots+(C_k^k+C_{k-1}^k)xy^k+C_k^ky^{k+1}
\end{aligned}
$$

由巴斯卡定理知 $C_1^k+C_0^k=C_1^{k+1}$ 、 $C_2^k+C_1^k=C_2^{k+1}$ 、…、 $C_k^k+C_{k-1}^k=C_k^{k+1}$ ，

且 $C_0^k=C_0^{k+1}$ 、 $C_k^k=C_{k+1}^{k+1}$ ，

故 $(x+y)^{k+1}=C_0^{k+1}x^{k+1}+C_1^{k+1}x^ky+C_2^{k+1}x^{k-1}y^2+\cdots+C_k^{k+1}xy^k+C_{k+1}^{k+1}y^{k+1}$ 。

由數學歸納法知 $(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y^1+\cdots+C_r^nx^{n-r}y^r+\cdots+C_{n-1}^nx^1y^{n-1}+C_n^ny^n$ 。

2. 二項式定理中，

令 $y=1$，可得 $(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+C_3^nx^3+\cdots+C_n^nx^n$ 。

3. $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \cdots + C_n^n x^n$，

令 $x=1$，可得 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ —①

令 $x=-1$，可得 $C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \cdots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$ —②

①+②$\Rightarrow 2(C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots + C_q^n) = 2^n$，故 $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots + C_q^n = 2^{n-1}$。

①−②$\Rightarrow 2(C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots + C_p^n) = 2^n$，故 $C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots + C_p^n = 2^{n-1}$。

4. 巴斯卡三角形可由巴斯卡定理得知：

	展開後係數	1	C_0^0
$(x+y)^1$	$\longrightarrow$	1 1	$C_0^1 \quad C_1^1$
$(x+y)^2$	$\longrightarrow$	1 2 1	$C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$
$(x+y)^3$	$\longrightarrow$	1 3 3 1	$C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3$
$(x+y)^4$	$\longrightarrow$	1 4 6 4 1	$C_0^4 \quad C_1^4 \quad C_2^4 \quad C_3^4 \quad C_4^4$
$(x+y)^5$	$\longrightarrow$	1 5 10 10 5 1	$C_0^5 \quad C_1^5 \quad C_2^5 \quad C_3^5 \quad C_4^5 \quad C_5^5$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

關鍵字

二項式定理、巴斯卡定理、巴斯卡三角形

例題 1

$(ax^2+\frac{1}{x})^5$ 的展開式中，x 項的係數為 40，試求 a。

Ans：

$(ax^2+\frac{1}{x})^5$ 展開後的一般項為 $C_r^5 (ax^2)^r (\frac{1}{x})^{5-r} = C_r^5 a^r x^{2r} \cdot x^{-5+r} = C_r^5 a^r x^{-5+3r}$，

當 $-5+3r=1$，得 $r=2$，

此時，$C_r^5 a^r x^{-5+3r} = C_2^5 a^2 x$ 可得 x 項的係數為 $C_2^5 a^2$，

因此，$C_2^5 a^2 = 40$，

求得 $a = \pm 2$。

例題 2

求 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ 展開式中 x^3 的係數。

Ans：

$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ 為首項 $(1+x)$ 、公比 $(1+x)$ 、項數 10 的等比級數，

因此級數和 $=\dfrac{(1+x)[(1+x)^{10}-1]}{(1+x)-1}=\dfrac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$

所求為 x^3 的係數，注意分母有 x，故需求分子中 x^4 的係數，

而 $(1+x)^{11}-(1+x)$ 的展開式中 x^4 項為 $C_4^{11}x^4$ ，

故答案為 $C_4^{11}=330$ 。

此題也可使用巴斯卡定理解：

$(1+x)$ 與 $(1+x)^2$ 沒有 x^3 項；

$(1+x)^3$ 中 x^3 項為 $C_3^3x^3$ ； $(1+x)^4$ 中 x^3 項為 $C_3^4x^3$ ；$\cdots$； $(1+x)^{10}$ 中 x^3 項為 $C_3^{10}x^3$ ；

故答案為 $C_3^3+C_3^4+\cdots+C_3^{10}=C_4^{11}=330$ 。

例題 3

11^{15} 除以 100 的餘數為何？

Ans：

$$\begin{aligned}11^{15}=(1+10)^{15}&=C_0^{15}10^0+C_1^{15}10^1+\underline{C_2^{15}10^2+C_3^{15}10^3+\cdots+C_{15}^{15}10^{15}}\\&=1+150+\underline{C_2^{15}10^2+C_3^{15}10^3+\cdots+C_{15}^{15}10^{15}}\\&=151+\underline{C_2^{15}10^2+C_3^{15}10^3+\cdots+C_{15}^{15}10^{15}}\ ,\end{aligned}$$

注意曲線的部分的每一項皆為 100 的倍數，

因此 $11^{15}=151+100A=100A+100+51=100(A+1)+51$ ，

故所求為 51。

例題 4

若將 $(x+y)^n$ 展開式中按照 x 之升冪排列後，發現第 17 項與第 23 項係數相等，試求正整數 n 。

Ans：

按照x之升冪排列，

第 1 項為$C_0^n x^0 y^n$、第 2 項為$C_1^n x^1 y^{n-1}$、第 3 項為$C_2^n x^2 y^{n-2}$、⋯

可推得第 17 項的係數為C_{16}^n、第 23 項的係數為C_{22}^n，

因此$C_{16}^n = C_{22}^n$，

故$n = 16 + 22 = 38$。

例題 5

試求下列各小題之值：

(1) $C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12} + \cdots + C_{12}^{12}$。

(2) $C_2^{12} + C_4^{12} + C_6^{12} + C_8^{12} + C_{10}^{12} + C_{12}^{12}$。

(3) $C_0^8 + 2C_1^8 + 4C_2^8 + \cdots + 2^8 C_8^8$。

Ans：

(1) $n = 12$代入$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$，

得$C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12} + \cdots + C_{12}^{12} = 2^{12} = 4096$。

(2) $C_2^{12} + C_4^{12} + C_6^{12} + C_8^{12} + C_{10}^{12} + C_{12}^{12} = 2^{12-1} = 2^{11} = 2048$。

(3) $n = 8$，$x = 2$代入$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \cdots + C_n^n x^n$，

得$(1+2)^8 = C_0^8 + C_1^8 \times 2 + C_2^8 \times 2^2 + C_3^8 \times 2^3 + \cdots + C_8^8 \times 2^8$，

故$C_0^8 + 2C_1^8 + 4C_2^8 + \cdots + 2^8 C_8^8 = 3^8 = 6561$。

例題 6

試求滿足$2000 < C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n < 3000$的自然數$n$。

Ans：

利用$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$，

得知$C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n - C_0^n = 2^n - 1$，

代入原式得$2000 < 2^n - 1 < 3000$，

推得 $2001 < 2^n < 3001$，

因為 $2^{10} = 1024$ 、 $2^{11} = 2048$ 、 $2^{12} = 4096$ ，

故 $n = 11$ 。

溫故知新

習題 1

$(ax - \frac{2}{x})^6$ 展開式中，常數項係數為 -8，試求 a 之值。

習題 2

求 $(1+x^2)+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^{10}$ 展開式中 x^4 的係數。

習題 3

試求 9^{10} 除以 1000 之餘數。

習題 4

$(1+x)^n$ 的展開式中，第 5 項與第 6 項之係數的比例為 $2:1$，試求 n 之值。

習題 5

已知 n 為一正奇數，且 $C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots + C_n^n = 512$ ，試求 n 之值。

習題 6

試求滿足 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n > 1000$ 的最小正整數 n 。

解答與解析

習題 1： $a=1$

習題 2：165

習題 3：401

習題 4：8

習題 5：10

習題 6：10