# 數學 1 進階講義

## 整係數多項式的一次因式檢驗法

景美女中．王若蘭老師

信望愛文教基金會

# 2-3-5　整係數多項式的一次因式檢驗法

## 定理敘述

設　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為 $n$ 次整係數多項式，

若 $ax-b$ 為 $f(x)$ 之因式，其中 $a$，$b$ 為整數且互質，則 $a\,|\,a_n$ 且 $b\,|\,a_0$。

（亦即 $a$ 是 $a_n$ 的因數，$b$ 是 $a_0$ 的因數）。

## 定理證明或說明

如果 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$，則由因式定理知 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$。代入可得

$$a_n\left(\frac{b}{a}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{b}{a}\right)+a_0=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

將①式兩邊同時乘上 $a^n$ 後可得

$$a_nb^n+a_{n-1}ab^{n-1}+\cdots+a_1a^{n-1}b+a_0b^n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

現在把②式中的 $a_nb^n$ 移到等號的右邊，並且整理以後可得

$$a(a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1a^{n-2}b+a_0a^{n-1})=-a_nb^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

觀察③式可知 $a$ 是 $-a_nb^n$ 的因數。可是 $a$ 與 $b^n$ 互質，所以 $a\,|\,a_n$。

類似地，我們把②式中的 $a_0a^n$ 移到等號的右邊，並且整理以後可得

$$b(a_nb^{n-1}+a_{n-1}ab^{n-2}+\cdots+a_1a^{n-1})=-a_0a^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

同樣地，我們可以看出 $-a_0a^n$ 是 $b$ 的倍數。可是 $b$ 與 $a^n$ 互質，所以 $b\,|\,a_0$。

## 注意事項

此定理之逆定理不成立

## 關鍵字

一次因式檢驗法，牛頓定理

### 例題 1

因式分解 $x^3+3x^2+4x+4$

Ans：

令 $f(x)=x^3+3x^2+4x+4$，

故 $f(x)$ 可能的一次因式為 $x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm4$。

逐一將 $x=\pm1$，$\pm2$，$\pm4$ 代入計算 $f(x)$ 的值，得

$f(1)\neq0$，故 $x-1$ 不是因式，

$f(-1)\neq0$，故 $x+1$ 不是因式，

$f(-2)=0$，故 $x+2$ 為因式，

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & 1 & +3 & +4 & +4 & -2 \\
+) & & -2 & -2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & +1 & +2 & \multicolumn{1}{|r|}{+0} &
\end{array}
$$

至此可利用綜合除法得到 $f(x)=(x+2)(x^2+x+2)$。

### 例題 2

設 $f(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+10$ 為整係數多項式，且可表為 4 個相異之整係數一次因式的乘積，試求序組 $(a,b)$ 為何？

Ans：

$\because$ $f(x)$ 的可能因式為 $x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm5$，$x\pm10$

且要滿足四根乘積為 10，和為 $-3$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+5)$

$=(x^2-1)(x^2+3x-10)=x^4+3x^3-11x^2-3x+10$

$\therefore$ 序組 $(a,b)=(-11,-3)$

**例題 3**

設 $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2-cx-6$ 為整係數多項式，則下列哪些選項一定不是 $f(x)$ 的一次因式？（多選）

(A) $x+2$ (B) $x-3$ (C) $3x+2$ (D) $2x-1$ (E) $5x+3$。

Ans：

(D)(E)

【解】

$f(x)$ 的可能因式為 $x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm3$，$x\pm6$，$3x\pm1$，$3x\pm2$，

$3x\pm3$（同 $x\pm1$），$3x\pm6$（同 $x\pm2$）

## 溫故知新

**習題 1**

試求方程式 $x^3-x^2+x-6=0$ 的實數解。

**習題 2**

設 $k$ 是整數，若 $f(x)=x^4+kx^2-3kx-2$ 有整係數之一次因式，則 $k=$______，又此一次因式為______。

**習題 3**

已知 $a$，$b$ 為整數，則下列哪些選項可能是 $2x^3+ax^2+bx-3$ 的因式？（多選）

(A) $2x+1$ (B) $2x-3$ (C) $3x-2$ (D) $x+2$ (E) $x+1$

**習題 4** 【101 指考乙】

已知實係數多項式方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 的三根相同，請問 $b$ 的值等於下列哪一個選項？

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

**習題 5** 【101 指考乙】

設 $a$，$b$ 均為正整數，而方程式 $x^2-ax+15=0$ 與 $x^2-bx+3b-1=0$ 有一共同根，且此共同根為質數，則 $b=$________。

## 解答與解析

習題 1： $x=2$

習題 2： $k=7$ ，一次因式為 $x-2$

習題 3：(A)(B)(E)

習題 4：(D)

習題 5：12