



# 數學基礎自學講義

## 等差級數

姓名

班級

## B4 1-2 等差級數



### 概念 1 級數和等差級數

① 將一個「數列」的每一項用「+」號連接起來，稱為\_\_\_\_\_。

② 將一個「等差數列」的每一項用「+」連接起來，稱為\_\_\_\_\_。

#### 【例】

(1) 1, 1, 2, 3, 5, 8 稱為\_\_\_\_\_。

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 稱為\_\_\_\_\_。

(2) 1, 3, 5, 7, 9 稱為\_\_\_\_\_。

1 + 3 + 5 + 7 + 9 稱為\_\_\_\_\_。



★ 1-2-5-8 是不是級數？

為什麼？



### 牛刀小試 1

1. (1) 1, 1, 2, 3, 5, 8 稱為\_\_\_\_\_。

(2) 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 稱為\_\_\_\_\_。

2. (1) 1, 3, 5, 7, 9, 11 稱為\_\_\_\_\_。

(2) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 稱為\_\_\_\_\_。



## 概念 2 符號說明

① 等差數列：1, 3, 5, 7, 9, 11。

② 等差級數：1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11。

一共有 \_\_\_\_\_ 項， $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$  \_\_\_\_\_。

③ 等差數列： $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 。

等差級數： $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$

$$S_1 =$$

$$S_2 =$$

$$S_3 =$$

⋮

$$S_n =$$



★ 等差級數：

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11。$$

$$S_1 =$$

$$S_2 =$$

$$S_3 =$$

$$S_4 =$$

$$S_5 =$$

$$S_6 =$$



## 牛刀小試 2

1. 若等差級數為  $2 + 4 + 6 + 8 + 10$ ，則

$$S_1 =$$

$$S_2 =$$

$$S_3 =$$

$$S_4 =$$

$$S_5 =$$

2. 若等差級數為  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n$ ，

則

$$S_1 =$$

$$S_2 =$$

$$S_3 =$$

$$S_4 =$$

$$S_n =$$

3. 若等差數列為 1, 4, 7, 10, 13, , 則

$$(1) 1 + 4 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(2) 1 + 4 + 7 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(3) 1 + 4 + 7 + 10 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(4) 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

4. 若等差數列為  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ ，

則

$$(1) a_1 + a_2 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(2) a_1 + a_2 + a_3 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(3) a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(4) a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(5) a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{\square}, \square = \underline{\hspace{2cm}}。$$



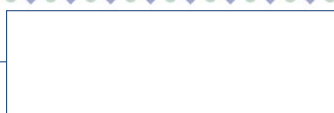
溫故知新

1

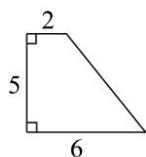
梯形面積



梯形面積公式



①



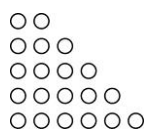
梯形面積 = \_\_\_\_\_

③ 等差級數

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

= \_\_\_\_\_

②



一共有多少個圓圈？

等差級數求和可以用  
梯形面積公式。

上底就是 \_\_\_\_\_，

下底就是 \_\_\_\_\_，

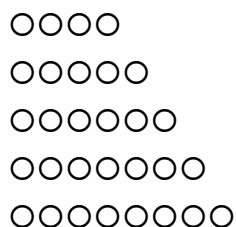
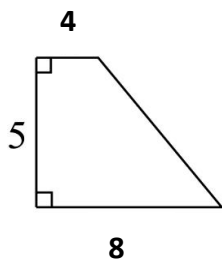
高就是 \_\_\_\_\_。



牛刀小試 3

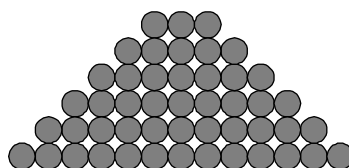
1. (1)

(2) 一共有多少個圓圈？

(3) 等差級數  $4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$ 

梯形面積 = \_\_\_\_\_。

2 右圖中，灰色球共有 \_\_\_\_\_ 顆。





## 例題 1 等差級數求和 1

①  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = ?$

首項 = \_\_\_\_\_，末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_

梯形面積公式 =  $\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2} =$  \_\_\_\_\_

②  $2 + 4 + 6 + \dots + 16 =$  \_\_\_\_\_

首項 = \_\_\_\_\_，末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_

梯形面積公式 = \_\_\_\_\_

等差級數的和 = \_\_\_\_\_



## 牛刀小試 4

1 求下列等差級數的和

(1)  $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 =$  \_\_\_\_\_。

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。

(2)  $8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 =$  \_\_\_\_\_。

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。

2. 求下列等差級數的和

(1)  $1 + 5 + 9 + \dots + 25 =$  \_\_\_\_\_。

首項 = \_\_\_\_\_，末項 = \_\_\_\_\_，項 = \_\_\_\_\_。

(2)  $8 + 16 + 24 + \dots + 48 =$  \_\_\_\_\_。

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。



## 例題 2 等差級數求和 2

①  $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 =$  \_\_\_\_\_

首項 = \_\_\_\_\_，末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_

梯形面積公式 = \_\_\_\_\_

等差級數的和 = \_\_\_\_\_

②  $1 + 4 + 7 + \dots + 19 =$  \_\_\_\_\_

首項 = \_\_\_\_\_，末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_

梯形面積公式 = \_\_\_\_\_

等差級數的和 = \_\_\_\_\_



## 牛刀小試 5

1. 求下列等差級數的和

(1)  $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 = ?$

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。

(2)  $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = ?$

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。

2. 求下列等差級數的和

(1)  $2 + 5 + 8 + \dots + 26 = ?$

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。

(2)  $4 + 7 + 10 + \dots + 25 = ?$

首項 = \_\_\_\_\_；末項 = \_\_\_\_\_，項數 = \_\_\_\_\_。

**例題****3****等差級數求和 3**

①  $2 + 5 + 8 + \dots + 65 = ?$

②  $3 + 8 + 13 + \dots + 103 = ?$

**牛刀小試 6**

1. 求下列等差級數的和

(1)  $2 + 4 + \dots + 32 = ?$

首項=\_\_\_\_\_；末項=\_\_\_\_\_，項數=\_\_\_\_\_。

(2)  $2 + 6 + 10 + \dots + 42 = ?$

首項=\_\_\_\_\_；末項=\_\_\_\_\_，項數=\_\_\_\_\_。

2. 求下列等差級數的和

(1)  $3 + 5 + \dots + 33 = ?$

首項=\_\_\_\_\_；末項=\_\_\_\_\_，項數=\_\_\_\_\_。

(2)  $3 + 6 + 9 + \dots + 33 = ?$

首項=\_\_\_\_\_；末項=\_\_\_\_\_，項數=\_\_\_\_\_。



## 例題 4 等差級數求和 4

①  $(-25) + (-23) + (-21) + \dots + (-7) = ?$

②  $58 + 51 + 44 + \dots + (-12) = ?$



## 牛刀小試 7

1. 求下列等差級數的和

(1)  $(-27) + (-19) + (-11) + (-3) + 5 + 13 + 21 = ?$

(2)  $(-23) + (-17) + (-11) + (-5) + 1 + 7 + 13 = ?$

2. 求下列等差級數的和

(1)  $(-27) + (-19) + \dots + 21 = ?$

(2)  $(-23) + (-17) + \dots + 13 = ?$



### 例題 5 等差級數求和 5

- ① 求 1 到 100 中所有 7 的倍數的和。

\_\_\_\_\_

梯形面積公式 = \_\_\_\_\_

上底是 \_\_\_\_\_，下底是 \_\_\_\_\_，高是 \_\_\_\_\_

總和是 \_\_\_\_\_



### 牛刀小試 8

1. (1) 1 到 100 的整數中，所有 6 的倍數  
的總和為 = \_\_\_\_\_。

- (2) 在 1~200 的整數中，所有 9 的倍數  
的總和為 = \_\_\_\_\_。

2. (1) 1 到 50 的整數中，所有 3 的倍數  
的總和 = \_\_\_\_\_。

- (2) 1 到 100 的整數中，所有 7 的倍數  
的總和 = \_\_\_\_\_。



### 概念 3

### 已知首項和公差，求前 $n$ 項的和



有一等差級數的首項是 3，公差是 4，求前 10 項的和？

\_\_\_\_\_

梯形面積公式 = \_\_\_\_\_

上底是 \_\_\_\_\_，下底是 \_\_\_\_\_，高是 \_\_\_\_\_

等差級數的和 = \_\_\_\_\_



### 牛刀小試 9

1. (1) 若一等差級數的首項為 2，公差為 3，則此等差級數前 8 項的和為何？

(2) 若一等差級數的首項為 3，公差為 5，則此等差級數前 10 項的和為何？

2 (1) 若一等差數列的首項為 25，公差為 -2，則此等差級數前 20 項的和為何？

(2) 若一等差級數的首項為 -2，公差為 -3，則此等差級數前 10 項的和為何？



## 概念 4 已知首項和前 $n$ 項的和，求公差



有一等差級數的首項是 7，前 8 項的和為 140，則公差是多少？

\_\_\_\_\_

梯形面積公式 = \_\_\_\_\_

上底是 \_\_\_\_\_，下底是 \_\_\_\_\_，高是 \_\_\_\_\_

面積是 \_\_\_\_\_

可以列出式子：



### 牛刀小試 10

1. (1) 已知一等差級數的首項為 11，  
前 8 項的和為 144，則公差為\_\_\_\_\_。

- (2) 已知一等差級數的首項為 2，前 9 項的  
和為 198，則公差為\_\_\_\_\_。

2. (1) 已知一等差級數的首項為  $(-4)$ ，  
前 7 項的和為 35，則公差為\_\_\_\_\_。

- (2) 已知一等差級數的首項為 29，前 8 項的  
和為 176，則公差為\_\_\_\_\_。



## 概念 5 等差級數的應用 1

已知等差級數  $47 + 44 + 41 + \dots$  求：

- 1 從第幾項開始為負數？
- 2 若前  $n$  項的和為最大，則  $n = ?$

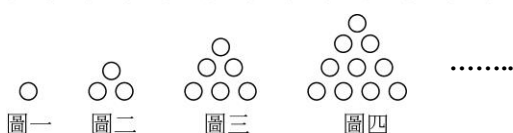


### 牛刀小試 11

1. 有一等差級數  $42 + 37 + 32 + \dots$ ，則前\_\_\_\_\_項的和為最大，此時和為\_\_\_\_\_。
2. 有一等差級數  $65 + 59 + 53 + \dots$ ，則前\_\_\_\_\_項的和為最大，此時和為\_\_\_\_\_。
3. 有一等差級數的首項為 78，公差為  $-4$ ，則從第\_\_\_\_\_項開始的數為負數，且此級數的和最大為\_\_\_\_\_。
4. 有一等差級數的首項為  $-82$ ，公差為 6，則從第\_\_\_\_\_項開始的數為正數，且此級數的和最小為\_\_\_\_\_。



## 概念 6 等差級數的應用 2



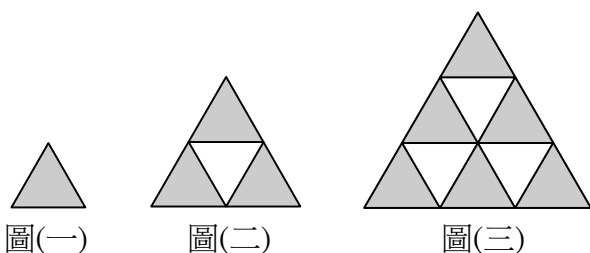
依照上面圖形的規則，回答下面的問題。

- (1) 請畫出圖五
- (2) 請問：圖五共有幾個圓圈？
- (3) 請問：圖十共有幾個圓圈？
- (4) 請問：圖  $N$  共有幾個圓圈？



## 牛刀小試 12

1.



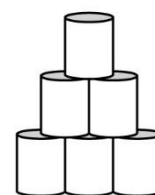
觀察圖(一)、圖(二)、圖(三)中，灰色三角形排列的方式。若依此規則繼續排列，則：

- (1) 圖(五) 需要幾張灰色三角形？
- (2) 圖(十) 需要幾張灰色三角形？
- (3) 第幾個圖排了78張灰色三角形？

2. 小美在美術課時，利用空奶粉罐堆疊如右的造型。已知

最上層有 1 罐，

第二層有 2 罐，……依序每一層比上一層多 1 罐。



- (1) 疊5層，一共需要幾罐奶粉
- (2) 疊10層，一共需要幾罐奶粉？
- (3) 若總共疊了66罐奶粉，則共疊幾層？

[解答]

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |             |                                                                                                                                                       |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P1 牛刀小試 1 | <p>1. (1) 數列<br/>(2) 級數</p> <p>2. (1) 等差數列<br/>(2) 等差級數</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | P4 牛刀小試 4   | <p>1. (1) 1、25、7、91<br/>(2) 8、48、6、168</p> <p>2. (1) 1、25、7、91<br/>(2) 8、48、6、168</p>                                                                 |
| P2 牛刀小試 2 | <p>1. <math>S_1=2</math>、<math>S_2=6</math>、<br/><math>S_3=12</math>、<math>S_4=20</math>、<br/><math>S_5=30</math></p> <p>2. <math>S_1= b_1</math><br/><math>S_2= b_1 + b_2</math><br/><math>S_3= b_1 + b_2 + b_3</math><br/><math>S_4= b_1 + b_2 + b_3 + b_4</math><br/><math>S_n= b_1 + b_2 + b_3 + b_4</math><br/><math>+ \dots + b_n</math></p> <p>3. (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5</p> <p>4. (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5<br/>(5) n</p> | P5 牛刀小試 5   | <p>1. (1) 2、23、8、100<br/>(2) 4、25、8、116</p> <p>2. (1) 2、26、9、126<br/>(2) 4、25、8、116</p>                                                               |
| P3 牛刀小試 3 | <p>1. (1) 30 (2) 30 (3) 30</p> <p>2. <math>\frac{(3+13) \times 6}{2} = 48</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | P6 牛刀小試 6   | <p>1. (1) 2、32、16、272<br/>(2) 2、42、11、242</p> <p>2. (1) 3、33、16、288<br/>(2) 3、33、11、198</p>                                                           |
|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | P7 牛刀小試 7   | <p>1. (1) <math>\frac{[(-27)+21] \times 7}{2} = -21</math><br/>(2) <math>\frac{[(-23)+13] \times 7}{2} = -35</math></p> <p>2. (1) -21<br/>(2) -35</p> |
|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | P8 牛刀小試 8   | <p>1. (1) 816 (2) 2277</p> <p>2. (1) 408 (2) 735</p>                                                                                                  |
|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | P9 牛刀小試 9   | <p>1. (1) 100 (2) 255</p> <p>2. (1) 120 (2) -155</p>                                                                                                  |
|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | P10 牛刀小試 10 | <p>1. (1) 2 (2) 5</p> <p>2. (1) 3 (2) -2</p>                                                                                                          |

|             |                                                    |  |  |
|-------------|----------------------------------------------------|--|--|
| P11 牛刀小試 11 | 1.9、198<br>2.11、385<br>3.21、800<br>4.15、-602       |  |  |
| P12 牛刀小試 12 | 1. (1) 15 (2) 55 (3) 12<br>2. (1) 15 (2) 55 (3) 11 |  |  |