# 數學 2 進階講義

## 等差數列的一般項

景美女中・李冠達老師

信望愛文教基金會

# 4-1-1　等差數列的一般項

## 定理證明或說明

**1. 數列的意義：**

(1) 將所有數值依序排成一列，就是數列。

(2) 該數列中，我們稱每一個數為[項]，排在首位的項稱為[首項]或[第 1 項]，排在第 2 位的項稱為第 2 項，依此類推，中間某一項稱為第 $k$ 項，直到最後一項稱為第 $n$ 項。

(3) 如果一個數列為有限多項，我們稱為有限數列；如果一個數列為無限多項，則稱為無限數列。其中，有限數列的最後一項，稱為末項。

**2. 數列的符號**

(1) 有限數列：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k,\cdots a_n$，共有 $n$ 項。

(2) 無限數列：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k,\cdots$，沒有最後一項。

不管有限或無限數列，亦可表示成$\langle a_k\rangle$，其中 $a_k$ 稱為該數列的一般項（通式）。

常見的兩種數列為等差數列與等比數列。

**3. 等差數列**

等差數列：$a_k-a_{k-1}=d$（後項 $a_k$ 減去前項 $a_{k-1}$ 為固定值 $d$）

## 注意事項

1. 讀者必須先了解何謂數列，再由不同的關係式了解數列的呈現模式。

2. 數列的一般式 $a_k$ 表示法要熟練，並且能夠解讀該數列呈現模式。

3. 能夠解讀並計算等差數列$\langle a_k=a+(k-1)d\rangle$之間的關係，

如假設等差數列為 $a$ 、 $a+d$ 、 $a+2d$ ；或 $a-d$ 、 $a$ 、 $a+d$

4. 等差中項問題要注意，$a,b,c$ 三數成等差數列，則 $a+c=2b$ 。

## 關鍵字

數列、等差數列

## 例題 1

寫出下列各數列的前五項：

(1) $\langle 2^k+3k\rangle$；(2) $\langle 2+3k\rangle$；(3) $\langle 3^{k-2}\rangle$；(4) $\left\langle \dfrac{k+1}{3^k}\right\rangle$

Ans：

(1) $5, 10, 17, 28, 47$

(2) $5, 8, 11, 14, 17$

(3) $\dfrac{1}{3}, 1, 3, 9, 27$

(4) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, \dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \dfrac{6}{243}$

## 例題 2

請你依下列各數列$\langle a_k\rangle$之規則，求下列各數列之一般式：

(1) 5, 8, 11, 14, 17, $\cdots$

(2) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 4, \cdots$

(3) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$

Ans：

(1) 首項為 5，公差為 3 之等差數列，

$$a_k = a_1 + (k-1)d = 5 + (k-1)\times 3$$
$$= 3k + 2$$

(2) 首項為$\dfrac{1}{4}$，公比為 2 之等比數列，

$$a_k = a_1 \times r^{k-1} = \frac{1}{4}\times 2^{k-1} = 2^{k-3}$$

(3) 首項為 1，公比為$-1$之等比數列，

$$a_k = a_1 \times r^{k-1} = 1\times(-1)^{k-1} = (-1)^{k-1}$$

請比較$(-1)^{k-1}$與$-1^{k-1}$之不同。

## 例題 3

請你求出等差數列$3,7,11,15,\cdots$的一般項$a_k$與第 100 項$a_{100}$之值。

Ans：

設該等差數列為$\langle a_k \rangle$．因為$7-3=11-7=15-11=4$，所以公差$d=4$。

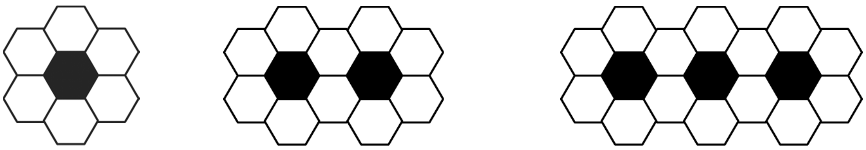
又首項$a=3$，由一般項$a_k=a+(k-1)d$，

得$a_k=3+(k-1)\cdot 4=4k-1$

且第 100 項為$a_{100}=3+(100-1)\cdot 4=399$

## 例題 4

用黑白兩種顏色的正六邊形地磚依照如下的規律拼成若干圖形，



第 1 個　　第 2 個　　第 3 個

試問：(1) 第 4 個圖案有白色地磚多少塊？

(2) 第$k$個圖案有白色地磚多少塊？

Ans：

觀察第 1 個，第 2 個與第 3 個圖形，

可以發現圖形每次均增加 ，

也就是 1 個黑色地磚與 4 個白色地磚。

因此，可以將這些圖形的白磚視為一個首項為 6，公差為 4 的等差數列。

得$a_k=6+(k-1)\cdot 4=4k+2$

且$a_4=18$

(1) 第 4 個圖案有白色地磚 18 塊。

(2) 第$k$個圖案有白色地磚$4k+2$塊。

## 例題 5

給定下列數列

$<\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots>$，

則 $\frac{3}{10}$ 為數列的第幾項？

Ans：

分組後

第 1 組（$\frac{1}{1}$）……………………….1 個數

第 2 組（$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$）………………….2 個數

第 3 組（$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$）…………….3 個數

第 4 組（$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$）……...4 個數

不難發現，每組分子與分母之和為該組號碼加 1，

且該組第一個分數之分子為該組號碼，之後分子遞減，

由此，$\frac{3}{10}$ 為第 12 組，且在該組排列在第 10 個數，

最後上述規律可得 $\frac{3}{10}$ 在數列的第$(1+2+3+4+\cdots+11)+10=76$ 項。

## 溫故知新

## 習題 1

已知 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 為等差數列，且兩數列如下：

$<a_n>=<2,8,14,20,\cdots,602>$；$<b_n>=<3,8,13,18,\cdots,503>$

則 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 兩數列中，數字相同的項數共有幾項？

## 習題 2

將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：

| | |
|---|---|
| 第 1 列 | 1 |
| 第 2 列 | 2，3 |
| 第 3 列 | 4，5，6 |
| 第 4 列 | 7，8，9，10 |
| 第 5 列 | 11，12，13，14，15 |
| …… | …… |
| ⋮ | ⋮ |

試問第 100 列第 3 個數是多少？

## 習題 3

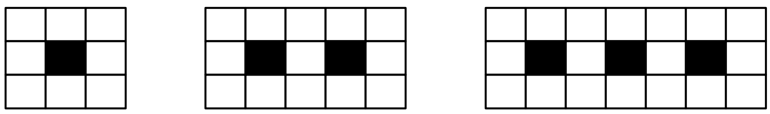
觀察下列3×3與4×4方格中的數字規律

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

如果在10×10的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 100 個數字之總和為何？

## 習題 4 【學測 95】



第 1 個　　第 2 個　　第 3 個

用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：

拼第 95 個圖需用到多少塊白色地磚？

## 解答與解析

習題 1：17

習題 2：4953

習題 3：385

習題 4：478 塊