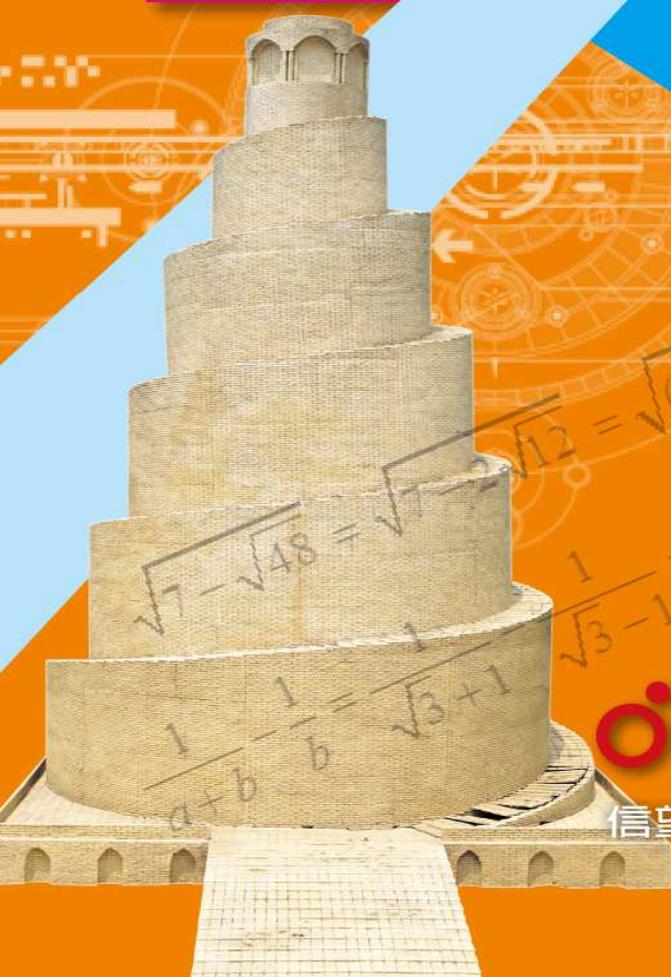


# 高中數學

進階  
講義

## 對數

陳清海 老師



信望愛文教基金會

## ok133 對數

### 一、對數的意義

當底數  $a > 0$ ， $a \neq 1$  且真數  $b > 0$  時， $x = \log_a b$  和  $b = a^x$  表示相同的意思。

稱  $\log_a b$  為「以  $a$  為底數時  $b$  的對數」。

注意：當  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且  $b > 0$  時， $\log_a b$  才有意義。

**【範例 1】**

以對數表示下列各式中  $x$  的值：

(1)  $2^x = 3$  , (2)  $6^x = 2$  , (3)  $(\sqrt{2})^x = 5$  .

Ans : (1)  $x = \log_2 3$  , (2)  $x = \log_6 2$  , (3)  $x = \log_{\sqrt{2}} 5$

**【詳解】**

(1) 因為  $x = \log_a b$  和  $b = a^x$  表示相同的意思，

所以由  $2^x = 3$  可得  $x = \log_2 3$  .

(2)  $6^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_6 2$  .

(3)  $(\sqrt{2})^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{2}} 5$  .

**【演練 1】**

以對數表示下列各式中  $x$  的值：

(1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$  , (2)  $3^x = \frac{1}{2}$  , (3)  $2^x = \sqrt{7}$  .

Ans : (1)  $x = \log_{\frac{1}{2}} 3$  , (2)  $x = \log_3 \frac{1}{2}$  , (3)  $x = \log_2 \sqrt{7}$

**【詳解】**

(1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 3$  .

(2)  $3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{1}{2}$  .

(3)  $2^x = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \log_2 \sqrt{7}$  .

**【範例 2】**

求下列各對數的值：

$$(1) \log_2 32, \quad (2) \log_2 \frac{1}{16}, \quad (3) \log_{99} 1, \quad (4) \log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ans : (1) } 5, \text{ (2) } -4, \text{ (3) } 0, \text{ (4) } -\frac{3}{2}$$

**【詳解】**

$$(1) \text{ 因為 } 32=2^5, \text{ 所以 } \log_2 32=5.$$

$$(2) \text{ 因為 } \frac{1}{16}=2^{-4}, \text{ 所以 } \log_2 \frac{1}{16}=-4.$$

$$(3) \text{ 因為 } 1=99^0, \text{ 所以 } \log_{99} 1=0.$$

$$(4) \text{ 因為 } \frac{1}{3\sqrt{3}}=(3\sqrt{3})^{-1}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}=3^{-\frac{3}{2}},$$

$$\text{所以 } \log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}=-\frac{3}{2}.$$

**【演練 2】**

求下列各對數的值：

$$(1) \log_{\sqrt{3}} 1, \quad (2) \log_{81} 27, \quad (3) \log_{\sqrt{7}} 49, \quad (4) \log_{\frac{1}{2}} 8.$$

$$\text{Ans : (1) } 0, \text{ (2) } \frac{3}{4}, \text{ (3) } 4, \text{ (4) } -3$$

**【詳解】**

$$(1) \text{ 因為 } 1=(\sqrt{3})^0, \text{ 所以 } \log_{\sqrt{3}} 1=0.$$

$$(2) \text{ 因為 } 27=3^3=(3^4)^{\frac{3}{4}}=81^{\frac{3}{4}}, \text{ 所以 } \log_{81} 27=\frac{3}{4}.$$

$$(3) \text{ 因為 } 49=(\sqrt{7})^4, \text{ 所以 } \log_{\sqrt{7}} 49=4.$$

$$(4) \text{ 因為 } 8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \text{ 所以 } \log_{\frac{1}{2}} 8=-3.$$

**【範例 3】**

設  $\log_{(x-1)}(-3x^2+11x-6)$  有意義，求實數  $x$  的最大可能範圍。

**Ans :**  $1 < x < 3, x \neq 2$

**【詳解】**

根據對數的基本定義，底數  $x-1 > 0, x-1 \neq 1$ ，即  $x > 1, x \neq 2$ 。

且真數  $-3x^2+11x-6 > 0$ ，即  $3x^2-11x+6 < 0 \Rightarrow (3x-2)(x-3) < 0$ ，

解得  $\frac{2}{3} < x < 3$ 。因此得  $1 < x < 3, x \neq 2$ 。

**【演練 3】**

設  $\log_x(x^2+2x)$  有意義，求實數  $x$  的最大可能範圍。

**Ans :**  $x > 0, x \neq 1$

**【詳解】**

根據對數的基本定義，底數  $x > 0, x \neq 1$ 。

且真數  $x^2+2x > 0$ ，即  $x(x+2) > 0$ ，解得  $x > 0$  或  $x < -2$ 。

因此得  $x > 0, x \neq 1$ 。

## 二、對數的運算性質

若  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , 且  $r$  與  $s$  均為正實數,  $t$  是任意實數, 則

$$(1) \log_a a = 1, \log_a 1 = 0 .$$

$$(2) \log_a rs = \log_a r + \log_a s .$$

$$(3) \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s .$$

$$(4) \log_a r^t = t \log_a r .$$

$$(5) \log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a} \text{ (換底公式)}, \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} .$$

以下為補充公式:

$$(6) \log_{a^t} r = \frac{t}{s} \log_a r .$$

$$(7) a^{\log_a r} = r .$$

$$(8) \log_{10} r = \log r \text{ (省略底數 } 10 \text{)} .$$

**【範例 4】**

求下列各式的值：

$$(1) \log_{10} 8 + \log_{10} 25 - \log_{10} 2 . \quad (2) 4\log_{10} 5 + 2\log_{10} 8 - 2\log_{10} 2 .$$

Ans : (1) 2 , (2) 4

**【詳解】**

$$(1) \log_{10} 8 + \log_{10} 25 - \log_{10} 2 = \log_{10} \left( 8 \times 25 \times \frac{1}{2} \right) = \log_{10} 100 = 2 .$$

$$(2) 4\log_{10} 5 + 2\log_{10} 8 - 2\log_{10} 2 = \log_{10} 5^4 + \log_{10} 8^2 - \log_{10} 2^2 \\ = \log_{10} \left( 5^4 \times 2^6 \times \frac{1}{2^2} \right) = \log_{10} 10^4 = 4 .$$

**【演練 4】**

求下列各式的值：

$$(1) \log_3 54 - 2\log_3 2 + \log_3 6 . \quad (2) \log \frac{11}{36} + 2\log 3 - \log \frac{11}{25} + 4\log 2 .$$

Ans : (1) 4 , (2) 2

**【詳解】**

$$(1) \log_3 54 - 2\log_3 2 + \log_3 6 = \log_3 54 - \log_3 2^2 + \log_3 6 \\ = \log_3 \left( 54 \times \frac{1}{4} \times 6 \right) = \log_3 81 = 4 .$$

$$(2) \log \frac{11}{36} + 2\log 3 - \log \frac{11}{25} + 4\log 2 = \log \frac{11}{36} + \log 9 - \log \frac{11}{25} + \log 16 \\ = \log \left( \frac{11}{36} \times 9 \times \frac{25}{11} \times 16 \right) = \log 100 = 2 .$$

**【範例 5】**

求下列各式的值：

$$(1) \log_{27} 9 , \quad (2) \log_{\sqrt{2}} 3 \times \log_3 4 .$$

Ans : (1)  $\frac{2}{3}$  , (2) 4

【詳解】

$$(1) \log_{27} 9 = \frac{\log 9}{\log 27} = \frac{\log 3^2}{\log 3^3} = \frac{2\log 3}{3\log 3} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \log_{\sqrt{2}} 3 \times \log_3 4 = \frac{\log 3}{\log \sqrt{2}} \times \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 4}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log 2^2}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\log 2}{\frac{1}{2}\log 2} = 4.$$

【演練 5】

求下列各式的值：

$$(1) \log_{\frac{1}{4}} 8, \quad (2) \log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 7 \times \log_7 8.$$

$$\text{Ans : (1) } -\frac{3}{2}, \text{ (2) } 3$$

【詳解】

$$(1) \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{\log 8}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log 2^3}{\log 2^{-2}} = \frac{3\log 2}{(-2)\log 2} = -\frac{3}{2}.$$

$$(2) \log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 7 \times \log_7 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 7}{\log 4} \times \frac{\log 8}{\log 7} \\ = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\log 2^3}{\log 2} = \frac{3\log 2}{\log 2} = 3.$$

【範例 6】

求下列各式的值：

$$(1) \frac{1}{\log_3 6} + \frac{1}{\log_{12} 6}, \quad (2) \left( \log_2 7 + \log_4 \frac{1}{7} \right) \left( \log_7 2 + \log_{49} \frac{1}{8} \right).$$

$$\text{Ans : (1) } 2, \text{ (2) } -\frac{1}{4}$$

【詳解】

$$(1) \frac{1}{\log_3 6} + \frac{1}{\log_{12} 6} = \log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 36 = 2.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left(\log_2 7 + \log_4 \frac{1}{7}\right) \left(\log_7 2 + \log_{49} \frac{1}{8}\right) = (\log_2 7 + \log_{2^2} 7^{-1}) (\log_7 2 + \log_{7^2} 2^{-3}) \\
 & = \left(\log_2 7 + \frac{-1}{2} \log_2 7\right) \left(\log_7 2 + \frac{-3}{2} \log_7 2\right) \\
 & = \frac{1}{2} \log_2 7 \times \left(-\frac{1}{2} \log_7 2\right) = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

**【演練 6】**

求下列各式的值：

$$(1) \log_2 99 + \log_{0.5} 99, \quad (2) (\log_2 3 + \log_4 9) \left(\log_3 2 + \log_9 \frac{1}{8}\right).$$

Ans : (1) 0, (2) -1

**【詳解】**

$$(1) \log_2 99 + \log_{0.5} 99 = \log_2 99 + \log_{2^{-1}} 99 = \log_2 99 - \log_2 99 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (\log_2 3 + \log_4 9) \left(\log_3 2 + \log_9 \frac{1}{8}\right) = (\log_2 3 + \log_{2^2} 3^2) (\log_3 2 + \log_{3^2} 2^{-3}) \\
 & = \left(\log_2 3 + \frac{2}{2} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{-3}{2} \log_3 2\right) \\
 & = 2 \log_2 3 \times \left(-\frac{1}{2} \log_3 2\right) \\
 & = -1.
 \end{aligned}$$

**【範例 7】**

設  $\log_{10} 3 = a$ ,  $\log_{10} 5 = b$ , 將下列各式用  $a$ ,  $b$  表示：

$$(1) \log_3 5, \quad (2) \log_5 15, \quad (3) \log_2 25.$$

$$\text{Ans : (1) } \frac{b}{a}, \quad (2) \frac{a+b}{b}, \quad (3) \frac{2b}{1-b}$$

**【詳解】**

$$(1) \log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = \frac{b}{a}.$$

$$(2) \log_5 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 3 + \log_{10} 5}{\log_{10} 5} = \frac{a+b}{b}.$$

$$(3) \log_2 25 = \frac{\log_{10} 25}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 5^2}{\log_{10} \left(\frac{10}{5}\right)} = \frac{2\log_{10} 5}{\log_{10} 10 - \log_{10} 5} = \frac{2b}{1-b} .$$

**【演練 7】**

設  $\log_{10} 3 = a$ ,  $\log_{10} 5 = b$ , 將下列各式用  $a$ ,  $b$  表示:

(1)  $\log_9 25$ ,                      (2)  $\log_2 45$ ,                      (3)  $\log_3 60$  .

Ans : (1)  $\frac{b}{a}$ , (2)  $\frac{2a+b}{1-b}$ , (3)  $\frac{2+a-b}{a}$

**【詳解】**

$$(1) \log_9 25 = \frac{\log_{10} 25}{\log_{10} 9} = \frac{2\log_{10} 5}{2\log_{10} 3} = \frac{b}{a} .$$

$$(2) \log_2 45 = \frac{\log_{10} 45}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} (3^2 \times 5)}{\log_{10} \frac{10}{5}} = \frac{2\log_{10} 3 + \log_{10} 5}{1 - \log_{10} 5} = \frac{2a+b}{1-b} .$$

$$(3) \log_3 60 = \frac{\log_{10} 60}{\log_{10} 3} \\ = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \frac{(1 - \log_{10} 5) + a + 1}{a} = \frac{2+a-b}{a} .$$

**【範例 8】**

設  $a = \log_2 3$ ,  $b = \log_3 11$ , 將下列各式用  $a$ ,  $b$  表示:

(1)  $\log_3 2$ ,                      (2)  $\log_2 11$ ,                      (3)  $\log_{66} 99$  .

Ans : (1)  $\frac{1}{a}$ , (2)  $ab$ , (3)  $\frac{2a+ab}{1+a+ab}$

**【詳解】**

$$(1) \text{ 根據對數的性質得 } \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a} .$$

$$(2) \text{ 利用換底公式得 } \log_2 11 = \frac{\log_3 11}{\log_3 2} = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab .$$

(3) 根據對數的性質得

$$\log_{66} 99 = \frac{\log_2 99}{\log_2 66} = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 11)}{\log_2 (2 \cdot 3 \cdot 11)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 11}{1 + \log_2 3 + \log_2 11} = \frac{2a+ab}{1+a+ab} .$$

**【演練 8】**

已知  $\log_a x=3$ ,  $\log_b x=8$ ,  $\log_c x=24$ , 求  $\log_{abc} x$  的值.

Ans : 2

**【詳解】**

利用換底公式得

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{3}, \quad \log_x b = \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{8}, \quad \log_x c = \frac{1}{\log_c x} = \frac{1}{24}.$$

$$\text{因此, } \log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}} = 2.$$

**【範例 9】**

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 ( $W/m^2$ ) 來衡量, 一般人能感覺出聲音的最小強度為  $I_0 = 10^{-12} (W/m^2)$ ; 當測得的聲音強度

為  $I (W/m^2)$  時, 所產生的噪音分貝數  $d$  為  $d(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ .

- (1) 一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為  $10^{-12} (W/m^2)$ , 求其產生的噪音分貝數.
- (2) 汽車製造廠測試發現, 某新車以每小時 60 公里速度行駛時, 測得的聲音強度為  $10^{-4} (W/m^2)$ , 試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝?

Ans : (1) 0, (2) 80

**【詳解】**

$$(1) \quad d(I) = 10 \cdot \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 1 = 10 \cdot 0 = 0 \text{ (分貝)}.$$

$$(2) \quad d(I) = 10 \cdot \log \frac{10^{-4}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^8 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ (分貝)}.$$

**【演練 9】**

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特( $W/m^2$ )來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為  $I_0=10^{-12}(W/m^2)$ ；當測得的聲音強度為

$I(W/m^2)$ 時，所產生的噪音分貝數  $d$  為  $d(I)=10\cdot\log\frac{I}{I_0}$  .

- (1) 若你耳邊同時有 10 隻蚊子，你可以感受到的噪音分貝數為何？
- (2) 若新車要求聲音強度產生噪音需不得超過 60 分貝，那汽車製造廠需將聲音強度降低為多少才能合乎要求？

**Ans :** (1) 10 , (2)  $10^{-6}(W/m^2)$

**【詳解】**

- (1) 同時有 10 隻蚊子，聲音強度為  $10^{-12}\times 10=10^{-11}$ ，因此

$$d(I)=10\cdot\log\frac{10^{-11}}{10^{-12}}=10\cdot\log 10=10\cdot 1=10 \text{ (分貝) .}$$

- (2) 設聲音強度需降低為  $x(W/m^2)$  .

因為  $d(I)=60$ ，所以  $10\cdot\log\frac{x}{10^{-12}}=60$ ，即  $\log\frac{x}{10^{-12}}=6$ ，

$$\frac{x}{10^{-12}}=10^6, \text{ 解得 } x=10^{-6} .$$

因此汽車製造廠需將聲音強度降低為  $10^{-6}(W/m^2)$ ，方能合乎標準 .

## ok133ex

### 一、基礎題

1. 求出下列各式的  $x$  值：

$$(1) \log_{\sqrt{2}} x = 0 \quad (2) \log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{2} \quad (3) \log_{\sqrt{2}} x = -2$$

$$(4) \log_x 49 = 2 (x > 0) \quad (5) 3^x = 7$$

Ans : (1) 1 , (2)  $\frac{1}{2}$  , (3)  $\frac{1}{2}$  , (4) 7 , (5)  $\log_3 7$

【詳解】

$$(1) \log_{\sqrt{2}} x = 0 \Rightarrow x = (\sqrt{2})^0 = 1$$

$$(2) \log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^{-2})^{\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \log_{\sqrt{2}} x = -2 \Rightarrow x = (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \log_x 49 = 2 (x > 0) \Rightarrow x^2 = 49 = 7^2 \Rightarrow x = 7$$

$$(5) 3^x = 7$$

$$\Rightarrow \log 3^x = \log 7$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3} = \log_3 7$$

2. 選出正確的選項：

$$(1) \log_2 15 = \log_2 7 + \log_2 8 \quad (2) \log_2 0.3 = -\log_2 3$$

$$(3) \log_9 49 = \log_3 7 \quad (4) \log_3 8 \times \log_8 3 = 1$$

Ans : (3)(4)

【詳解】

$$(1) \log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5 \neq \log_2 7 + \log_2 8$$

$$(2) \log_2 0.3 = \frac{\log \frac{3}{10}}{\log 2} = \frac{\log 3 - 1}{\log 2} \neq -\log_2 3$$

$$(3) \log_9 49 = \frac{\log 49}{\log 9} = \frac{2\log 7}{2\log 3} = \log_3 7。$$

$$(4) \log_3 8 \times \log_8 3 = \frac{\log 8}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 8} = 1。$$

3. 求下列各式的值：

$$(1) \log_{\sqrt{3}} 1, (2) \log_4 \frac{1}{8}, (3) 4^{\log_2 5}。$$

$$\text{Ans : (1) } 0, (2) -\frac{3}{2}, (3) 25$$

【詳解】

$$(1) \log_{\sqrt{3}} 1 = \frac{\log 1}{\log \sqrt{3}} = 0,$$

$$(2) \log_4 \frac{1}{8} = \frac{\log \frac{1}{8}}{\log 4} = \frac{\log 1 - \log 8}{\log 2^2} = \frac{0 - 3\log 2}{2\log 2} = -\frac{3}{2},$$

$$(3) x = 4^{\log_2 5}$$

$$\Rightarrow \log x = \log 4^{\log_2 5} = \log_2 5 \cdot \log 4 = \frac{\log 5}{\log 2} \times 2\log 2 = 2\log 5 = \log 25,$$

$$\Rightarrow x = 25。$$

4. 已知  $\log_a \sqrt[3]{64} = \frac{2}{3}$ ，且  $\log_8 b = -\frac{1}{3}$ ，求  $a, b$  的值。

$$\text{Ans : } a=8, b=\frac{1}{2}$$

【詳解】

$$\log_a \sqrt[3]{64} = \frac{2}{3} \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4 = (2^3)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = 8。$$

$$\log_8 b = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}。$$

5. 求下列各式的值：

$$(1) \log_6 12 + \log_6 75 - 2\log_6 5 .$$

$$(2) \log_3 15 + \frac{1}{2}\log_3 30 - \log_3 5\sqrt{5} - \log_9 2 .$$

$$(3) \frac{\log_4 9}{\log_2 81} .$$

$$(4) \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 9 .$$

$$(5) \left(\log_2 5 + \log_8 \sqrt{125}\right) \left(\log_{25} 4 + \log_5 \frac{1}{8}\right) .$$

$$\text{Ans : (1) } 2, (2) \frac{3}{2}, (3) \frac{1}{4}, (4) 2, (5) -3$$

【詳解】

$$(1) \log_6 12 + \log_6 75 - 2\log_6 5$$

$$= \log_6 12 + \log_6 75 + \log_6 5^{-2}$$

$$= \log_6 \left(12 \times 75 \times \frac{1}{25}\right)$$

$$= \log_6 36$$

$$= 2 .$$

$$(2) \log_3 15 + \frac{1}{2}\log_3 30 - \log_3 5\sqrt{5} - \log_9 2$$

$$= \log_3 15 + \frac{1}{2}\log_3 30 - \log_3 5\sqrt{5} - \frac{\log 2}{\log 3^2}$$

$$= \log_3 15 + \log_3 \sqrt{30} + \log_3 \frac{1}{5\sqrt{5}} - \log_3 \sqrt{2}$$

$$= \log_3 \left(15 \times \sqrt{30} \times \frac{1}{5\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \log_3 3\sqrt{3} = \frac{\log 3^{\frac{3}{2}}}{\log 3} = \frac{3}{2} .$$

$$(3) \frac{\log_4 9}{\log_2 81} = \frac{\frac{\log 9}{\log 4}}{\frac{\log 81}{\log 2}} = \frac{2\log 3}{2\log 2} \times \frac{\log 2}{4\log 3} = \frac{1}{4} .$$

$$(4) \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 9 = \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \frac{\log 9}{\log 5} = \frac{2\log 3}{\log 3} = 2 .$$

$$\begin{aligned}
(5) & \left(\log_2 5 + \log_8 \sqrt{125}\right) \left(\log_{25} 4 + \log_5 \frac{1}{8}\right) \\
&= \left(\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log \sqrt{125}}{\log 8}\right) \left(\frac{\log 4}{\log 25} + \frac{\log \frac{1}{8}}{\log 5}\right) \\
&= \left(\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\frac{3}{2} \log 5}{3 \log 2}\right) \left(\frac{2 \log 2}{2 \log 5} + \frac{-3 \log 2}{\log 5}\right) \\
&= 1 - 3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\
&= -3.
\end{aligned}$$

6. 設  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ , 用  $a$ ,  $b$  表示出下列各式:

(1)  $\log_2 5$ , (2)  $\log_6 15$ , (3)  $\log_5 3$ .

Ans : (1)  $ab$ , (2)  $\frac{a+ab}{1+a}$ , (3)  $\frac{1}{b}$

【詳解】

$$(1) \log_2 5 = \log_2 3 \times \log_3 5 = ab.$$

$$(2) \log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{a+ab}{1+a}.$$

$$(3) \log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{a}{ab} = \frac{1}{b}.$$

$$\text{【備註】 } \log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} = \log_a c$$

7. 已知  $f(x) = \log_{\sqrt{2}} 7x$ , 且  $f(2a) - f(b) = 4$ , 求  $\frac{a}{b}$  的值.

Ans : 2

【詳解】

$$f(2a) - f(b) = 4$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} (7 \times 2a) - \log_{\sqrt{2}} (7b) = 4$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} \frac{14a}{7b} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{b} = (\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

## 二、進階題

8. 化簡  $27^{\log_9 4} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{4}}$  .

Ans : 24

【詳解】

$$x = 27^{\log_9 4}$$

$$\Rightarrow \log x = \log 27^{\log_9 4} = \log_9 4 \cdot \log 27 = \frac{\log 4}{\log 9} \cdot \log 27 = \frac{2\log 2}{2\log 3} \cdot 3\log 3 = 3\log 2 = \log 8$$

$$\Rightarrow x = 8$$

$$y = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \log y = \log \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{4}} = \log_3 \frac{1}{4} \cdot \log \frac{1}{9} = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log 3} \cdot (-2\log 3) = -2\log \frac{1}{4} = \log \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \log 16$$

$$\Rightarrow y = 16$$

$$27^{\log_9 4} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{4}} = 8 + 16 = 24$$

9. 已知  $a = \log_7 2$ ,  $b = \log_3 7$ , 求  $7^{2a - \frac{1}{b} + 1}$  的值 .

Ans :  $\frac{28}{3}$

【詳解】

$$\text{設 } x = 7^{2a - \frac{1}{b} + 1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \log x &= \log 7^{2a - \frac{1}{b} + 1} = (2a - \frac{1}{b} + 1) \log 7 = (2 \log_7 2 - \frac{1}{\log_3 7} + 1) \times \log 7 \\ &= (\frac{2 \log 2}{\log 7} - \frac{\log 3}{\log 7} + 1) \cdot \log 7 = 2 \log 2 - \log 3 + \log 7 = \log 2^2 - \log 3 + \log 7 = \log \frac{28}{3} \\ \Rightarrow x &= \frac{28}{3}.\end{aligned}$$

10. 求下列各式的值：

(1)  $9^{\log_3 2} + (\sqrt{2})^{\log_4 81}$  .      (2)  $\log_8 (\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})$  .

Ans : (1) 7 , (2)  $\frac{1}{6}$

【詳解】

(1)  $x = 9^{\log_3 2}$

$$\Rightarrow \log x = \log 9^{\log_3 2} = (\log_3 2) \times \log 9 = \frac{\log 2}{\log 3} \times (2 \log 3) = 2 \log 2 = \log 4$$

$$\Rightarrow x = 4 .$$

$$y = (\sqrt{2})^{\log_4 81}$$

$$\Rightarrow \log y = \log (\sqrt{2})^{\log_4 81} = (\log_4 81) (\log \sqrt{2}) = \frac{\log 81}{\log 4} \times \log \sqrt{2} = \frac{4 \log 3}{2 \log 2} \times \frac{1}{2} \log 2 = \log 3$$

$$\Rightarrow y = 3 ,$$

$$9^{\log_3 2} + (\sqrt{2})^{\log_4 81} = 4 + 3 = 7 .$$

(2)  $(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4 - 2 = 2 ,$

$$\log_8 (\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}) = \log_8 \sqrt{2} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log 8} = \frac{\frac{1}{2} \log 2}{3 \log 2} = \frac{1}{6} .$$

11. 設  $a = \log_2 3$ ,  $b = \log_3 7$ , 試以  $a$ ,  $b$  表示  $\log_{42} \frac{56}{9}$  .

Ans :  $\frac{3+ab-2a}{1+a+ab}$

【詳解】

$$ab = (\log_2 3)(\log_3 7) = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 7}{\log 3} = \log_2 7。$$

$$\begin{aligned} \log_{42} \frac{56}{9} &= \frac{\log_2 \frac{56}{9}}{\log_2 42} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 7) - \log_2 9}{\log_2 (2 \times 3 \times 7)} = \frac{3\log_2 2 + \log_2 7 - 2\log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} \\ &= \frac{3+ab-2a}{1+a+ab}。 \end{aligned}$$

12. 設  $a, b$  為正實數，且  $\log_7 a = 11$ ,  $\log_7 b = 13$ ，求與  $\log_7(a+b)$  最接近的整數。

Ans : 13

【詳解】

$$\log_7 a = 11 \Rightarrow a = 7^{11},$$

$$\log_7 b = 13 \Rightarrow b = 7^{13}$$

$$\Rightarrow a + b = 7^{11} + 7^{13} = 7^{11}(1 + 49) \doteq 7^{13},$$

$$\Rightarrow \log_7(a + b) \doteq 13。$$

13. 國際上使用芮氏規模來表示地震的強度。設  $E(M)$  (單位：爾格)

為地震芮氏規模  $M$  時所釋放出來的能量， $M$  與  $E(M)$  的關係如下

$$\log_{10} E(M) = 11.8 + 1.5M。某次地震其芮氏規模為 4，試問$$

- (1) 其震央所釋放的能量  $E(4)$  為多少？
- (2) 如果芮氏規模  $a$  之地震所釋放的能量是芮氏規模 4 之 1000 倍，則  $a$  大約是多少？

Ans : (1)  $10^{17.8}$  (爾格)，(2) 6

【詳解】

$$\log E(4) = 11.8 + 1.5 \cdot 4 = 17.8 \Rightarrow E(4) = 10^{17.8}。$$

$$(2) E(a) = 1000E(4)$$

$$\Rightarrow \log E(a) = \log[1000E(4)] = \log 1000 + \log E(4) = 3 + \log E(4)$$

$$\Rightarrow 11.8 + 1.5a = 3 + 11.8 + 1.5 \cdot 4$$

$$\Rightarrow 1.5a = 9$$

$$\Rightarrow a = 6 \circ$$

14. 若正實數  $x, y$  滿足  $\log_{10}x=2.8$  ,  $\log_{10}y=5.6$  , 則  $\log_{10}(x^2+y)$  最接近下列哪一個選項的值 ?

(1) 2.8 , (2) 5.6 , (3) 5.9 , (4) 8.4 , (5) 11.2. [學測 101]

Ans : (3)

【詳解】

$$\log_{10}x=2.8 \Rightarrow x=10^{2.8}, x^2=(10^{2.8})^2=10^{5.6}$$

$$\log_{10}y=5.6 \Rightarrow y=10^{5.6}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{10}(x^2+y) &= \log_{10}(10^{5.6}+10^{5.6}) = \log_{10}(10^{5.6} \times 2) \\ &= 5.6 + \log_{10}2 = 5.6 + 0.301 = 5.901 \end{aligned}$$

故選(3)