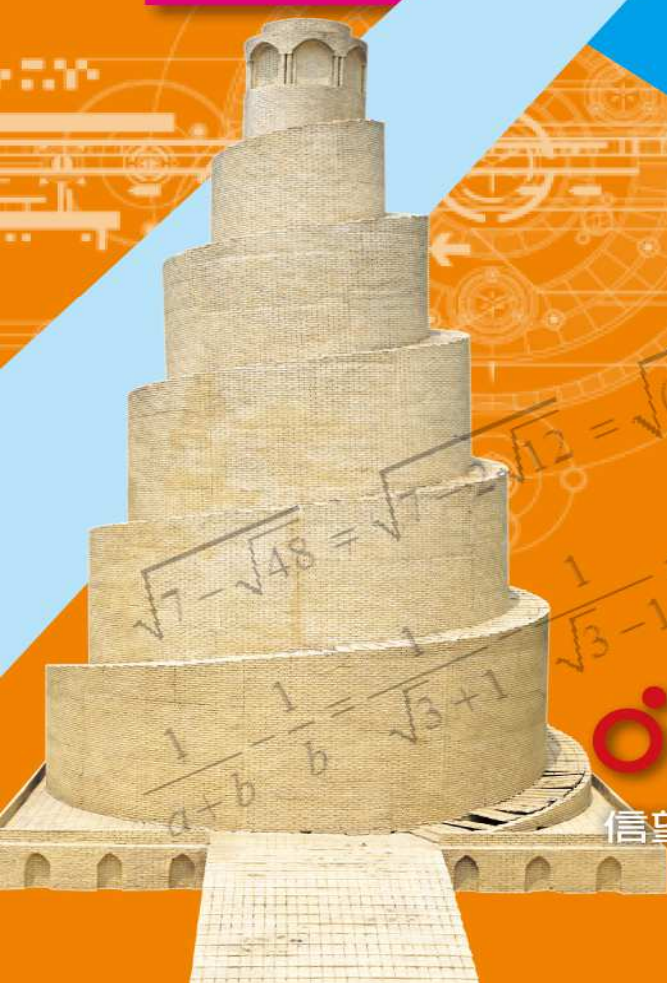


高中數學

進階
講義

矩陣的運算

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\div$

lt99ok432 矩陣的運算

主題一、矩陣的意義與相等

1. 矩陣的表示法：當矩陣 A 共有 m 列 n 行時，我們稱 A 是一個 $m \times n$ 階的矩陣。通常將 A 表為下列形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

或簡記為 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，其中 a_{ij} 為 A 的第 (i, j) 元。

當 $m = n$ 時， A 是一個正方形的矩陣，稱 A 是一個 n 階方陣。

2. 矩陣的相等：當兩個矩陣 A 和 B 同階（即列數相等且行數相等），而且它們相同位置的元都相等時，稱矩陣 A 與 B 相等，記作 $A = B$ 。

【例題 1】【配合課本例 1】

已知矩陣 $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ ，且每一個元 $a_{ij} = 2i + j$ ，求 A 。

Ans : $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

【詳解】

因為 $a_{ij} = 2i + j$ ，所以

$$a_{11} = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad a_{12} = 2 \times 1 + 2 = 4, \quad a_{13} = 2 \times 1 + 3 = 5,$$

$$a_{21} = 2 \times 2 + 1 = 5, \quad a_{22} = 2 \times 2 + 2 = 6, \quad a_{23} = 2 \times 2 + 3 = 7.$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

【類題 1】

已知矩陣 $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ ，且每一個元 $b_{ij} = i^2 + j$ ，求 B 。

Ans : $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

【詳解】

因為 $b_{ij} = i^2 + j$ ，所以

$$b_{11} = 1^2 + 1 = 2, \quad b_{12} = 1^2 + 2 = 3, \quad b_{13} = 1^2 + 3 = 4,$$

$$b_{21} = 2^2 + 1 = 5, \quad b_{22} = 2^2 + 2 = 6, \quad b_{23} = 2^2 + 3 = 7.$$

$$\text{故 } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

【例題 2】【配合課本例 2】

已知 $\begin{bmatrix} 3 & b & 2 \\ a & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & c & d \end{bmatrix}$ ，求 a, b, c, d 的值。

Ans : $a=5, b=7, c=1, d=5$

【詳解】

根據矩陣相等的定義，

得 $a=5, b=7, c=1, d=5$ 。

【類題 2】

已知 $\begin{bmatrix} a+b & 3c-d \\ 3a-b & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ，求 a, b, c, d 的值。

Ans : $a=2, b=1, c=3, d=4$

【詳解】

根據矩陣相等的定義，得

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a-b=5 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} 3c-d=5 \\ c+d=7 \end{cases} .$$

解得 $a=2$, $b=1$, $c=3$, $d=4$.

主題二、矩陣的加減法

1. 矩陣的加法：若 A 和 B 都是 $m \times n$ 階矩陣，則它們的和 $A+B$ 也是 $m \times n$ 階矩陣，而且 $A+B$ 的每個元都等於 A 與 B 中相同位置元的和。
2. 若 A ， B 與 C 是同階的矩陣，則
 - (1) $A+B=B+A$. (加法交換律)
 - (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$. (加法結合律)
3. 當一個 $m \times n$ 階矩陣的每個元都是 0 時，我們稱之為 $m \times n$ 階的零矩陣，以 $O_{m \times n}$ 或 O 表示。
4. 任意一個矩陣 A 與其同階的零矩陣 O 的和仍為 A ，即 $A+O=O+A=A$
5. 矩陣的減法：若 A 和 B 都是 $m \times n$ 階矩陣，則 $A-B$ 也是 $m \times n$ 階矩陣，而且 $A-B$ 的每個第 (i, j) 元都等於 A 的第 (i, j) 元減去 B 的第 (i, j) 元所得的差。

【例題 3】【配合課本例 3, 4】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $A + B$ 與 $A - B$.

$$\text{Ans : } A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

【詳解】

因為 A 與 B 都是 2×2 階矩陣，
所以它們可以相加及相減，並且

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 \\ 3+1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-3 \\ 3-1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

【類題 3】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $B + A$ 與 $B - A$.

$$\text{Ans : } B + A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, B - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

【詳解】

$$B + A = \begin{bmatrix} 0+1 & 3+2 \\ 1+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 0-1 & 3-2 \\ 1-3 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

【例題 4】【配合課本例 5】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 且 $X + A = B$, 求矩陣 X .

$$\text{Ans : } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【詳解】

因為 $X + A = B$, 所以

$$X = B - A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【類題 4】

已知 $X - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 X 。

Ans : $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

【詳解】

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

主題三、矩陣的係數積

1. 矩陣的係數積：設 r 為實數， A 是 $m \times n$ 階矩陣．實數 r 與矩陣 A 的係數積記為 rA ，也是一個 $m \times n$ 階矩陣，且 rA 的每個元都等於 A 中相同位置元的 r 倍．
2. 若 r, s 是實數， A, B 是同階的矩陣，則
 - (1) $r(A+B) = rA + rB$ ．
 - (2) $(r+s)A = rA + sA$ ．
 - (3) $(rs)A = r(sA)$ ．

【例題 5】【配合課本例 6】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 求下列各矩陣:

(1) $(-2)A$.

(2) $2A + 3B$.

(3) $3A - 2B$.

Ans : (1) $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

【詳解】

依定義, 得

$$(1) (-2)A = \begin{bmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 \\ -2 \times 3 & -2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$(2) 2A + 3B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}.$$

$$(3) 3A - 2B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

【類題 5】

已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求下列各矩陣:

(1) $3A + 2B$.

(2) $2A - 3B$.

Ans : (1) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 13 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -3 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$

【詳解】

$$(1) 3A + 2B = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 13 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) 2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -3 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}.$$

【例題 6】 【配合課本例 7】

已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, 且 $2(3X - B) = A$, 求矩陣 X .

Ans : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

【詳解】

將 $2(3X - B) = A$ 展開, 得 $6X - 2B = A$,

移項得 $6X = A + 2B$.

將等號兩邊同乘 $\frac{1}{6}$, 得

$$X = \frac{1}{6}(A + 2B) = \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

【類題 6】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 且 $4(X + \frac{1}{2}A) = 2X + 3B$, 求矩陣 X .

Ans : $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

【詳解】

將原式展開, 得 $4X + 2A = 2X + 3B$,

移項得 $2X = 3B - 2A$.

將等號兩邊同乘 $\frac{1}{2}$, 得

$$X = \frac{1}{2}(3B - 2A) = \frac{1}{2} \left(3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 14 \\ -12 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

【例題 7】 【常考題】

已知 $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, 且矩陣 X, Y 滿足 $X - 2Y = A$ 且

$2X + Y = B$, 求矩陣 X 與 Y .

Ans : $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

【詳解】

由 $\begin{cases} X - 2Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$, 解得

$$X = \frac{1}{5}(A + 2B) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{5}(B - 2A) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

【類題 7】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, 且矩陣 X , Y 滿足 $X + 2Y = A$ 且 $2X - Y = B$, 求矩陣 X 與 Y .

$$\text{Ans : } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

【詳解】

由 $\begin{cases} X + 2Y = A \\ 2X - Y = B \end{cases}$, 解得

$$X = \frac{1}{5}(A + 2B) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{5}(2A - B) = \frac{1}{5}\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 15 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

主題四、矩陣的乘法

1. 矩陣乘積的定義：若 A 是一個 $m \times n$ 階矩陣， B 是一個 $n \times p$ 階矩陣，則 A 和 B 的乘積 $AB = C$ 是一個 $m \times p$ 階矩陣，而且 C 中的

每個 (i, j) 元都等於 A 的第 i 列中各元（共

有 n 個元）與 B 的第 j 行中各對應元（也有 n 個元）之乘積的和，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 。

2. 矩陣運算不滿足的一些定律：

- (1) 矩陣的乘法並不滿足交換律，即乘積 AB 與 BA 不一定相等。

 例： $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$ ，但 $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$ 。

- (2) 當矩陣 A 與 B 都不是零矩陣時，其乘積 AB 卻有可能是零矩陣。

 例： $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 不是零矩陣，但 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$ 。

- (3) 矩陣的乘法並不滿足消去律，即當 $AB = AC$ ，且 $A \neq O$ 時，也不能斷定 $B = C$ 一定成立。

$$\begin{array}{ccc} A & B = & C \\ m \times n & n \times p & m \times p \end{array}$$

相等

乘積的階數

3. 矩陣運算滿足的一些定律：

若 r 為實數， A ， B ， C 為矩陣，且下列各矩陣運算都有意義，則

$$(1) A(B+C) = AB + AC .$$

$$(2) (A+B)C = AC + BC .$$

$$(3) r(AB) = (rA)B = A(rB) .$$

$$(4) (AB)C = A(BC) .$$

4. 單位矩陣：當一個 n 階方陣，從它的左上角到右下角的對角線上各位置的元都是 1，而其餘各元都是 0 時，我們稱它為 n 階單位方陣，以 I_n 表之。

 例： $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

這 I_n 在矩陣的乘法中，就相當於實數乘法中的 1 .

【例題 8】【配合課本例 8】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(1) 求 AB .

(2) 判斷 BA 是否存在.

Ans : (1) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$, (2) 不存在

【詳解】

(1) 因為 A 是 3×3 階矩陣, 而 B 是 3×2 階矩陣, 所以其乘積 AB 是 3×2 階矩陣, 而且

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 \\ 3 \times 3 + 1 \times 2 + (-1) \times 1 & 3 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 3 \\ 2 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 & 2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) 因為 B 的行數 2 不等於 A 的列數 3, 所以 BA 不存在.

【類題 8】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 AB .

(2) 判斷 BA 是否存在.

Ans : (1) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$, (2) 不存在

【詳解】

(1) 因為 A 是 2×2 階矩陣, 而 B 是 2×3 階矩陣, 所以其乘積 AB 是 2×3 階矩陣, 而且

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 4 \times 3 & 3 \times 2 + 4 \times 2 & 3 \times 3 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}.$$

(2) 因為 B 的行數 3 不等於 A 的列數 2, 所以 BA 不存在.

【例題 9】【配合課本例 9】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 AB 與 BA , 並比較它們是否相等.

$$\text{Ans : } AB = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, AB \neq BA$$

【詳解】

因為 A 是 3×2 階矩陣，而 B 是 2×3 階矩陣，
所以 AB 是 3×3 階矩陣， BA 是 2×2 階矩陣，而且

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

故 $AB \neq BA$.

【類題 9】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，求 AB 與 BA ，並比較它們是否相等。

$$\text{Ans : } AB = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, AB \neq BA$$

【詳解】

因為 A 是 2×2 階矩陣，而 B 也是 2×2 階矩陣，
所以 AB 是 2×2 階矩陣， BA 也是 2×2 階矩陣，而且

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

故 $AB \neq BA$.

【例題 10】【配合課本內文】

(1) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，求 AB 與 AC .

(2) 「若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$.」是對的敘述嗎？

(3) 「若 $AB = AC$ ，且 $A \neq O$ ，則 $B = C$.」是對的敘述嗎？

$$\text{Ans : } (1) AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (2) \text{ 錯的}, (3) \text{ 錯的}$$

【詳解】

$$(1) \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 由(1)得知，此敘述是錯的敘述。

(3) 由(1)得知，此敘述是錯的敘述。

【類題 10】

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, 求 AB 與 AC , 並比較它們是否相等。

$$\text{Ans : } AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}, AB = AC$$

【詳解】

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

雖然 $B \neq C$, 且 $A \neq O$, 但 $AB = AC$ 。

【例題 11】【配合課本例 10】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $(AB)C$ 與 $A(BC)$,

並比較它們是否相等。

$$\text{Ans : } (AB)C = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 27 & 6 \end{bmatrix}, A(BC) = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 27 & 6 \end{bmatrix}, (AB)C = A(BC)$$

【詳解】

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 27 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 27 & 6 \end{bmatrix}.$$

得知 $(AB)C = A(BC)$.

【類題 11】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求 $(AB)C$ 與 $A(BC)$.

$$\text{Ans : } (AB)C = \begin{bmatrix} 28 \\ 26 \end{bmatrix}, A(BC) = \begin{bmatrix} 28 \\ 26 \end{bmatrix}$$

【詳解】

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 26 \end{bmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

【例題 12】 【配合課本例 11】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$,

求 $AC + BC$ 與 $(A + B)C$, 並比較它們是否相等 .

$$\text{Ans : } AC + BC = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (A + B)C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, AC + BC = (A + B)C$$

【詳解】

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 37 & 34 \\ 34 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -29 & -27 \\ -34 & -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A + B)C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得知 $AC + BC = (A + B)C$.

【類題 12】

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 7 \\ -6 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -9 & 8 & -7 \\ 6 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

求 $AB + AC$ 與 $A(B + C)$, 並比較它們是否相等 .

$$\text{Ans : } AB + AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, A(B + C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, AB + AC = A(B + C)$$

【詳解】

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 24 & -19 & 14 \\ 42 & -34 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ -24 & 19 & -8 \\ -42 & 34 & -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

得知 $AB + AC = A(B + C)$.

【例題 13】 【配合課本例 12】

$$\text{已知矩陣 } A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 25 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -7 & 21 & -7 \\ 0 & -14 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{求 } AB.$$

$$\text{Ans : } \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

【詳解】

利用矩陣乘法對係數積的結合律，得

$$AB = (5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}) (7 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix})$$

$$= 35 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 35 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

【類題 13】

$$\text{已知矩陣 } A = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 35 & 14 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 26 & -13 \\ -65 & 39 \end{bmatrix}, \quad \text{求 } AB.$$

$$\text{Ans : } \begin{bmatrix} 91 & 0 \\ 0 & 91 \end{bmatrix}$$

【詳解】

利用矩陣乘法對係數積的結合律，得

$$\begin{aligned}
 AB &= (7 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}) (13 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}) \\
 &= 91 \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= 91 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 & 0 \\ 0 & 91 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

【例題 14】【配合課本例 13】

已知矩陣 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求下列各矩陣:

(1) A^4 . (2) $A + A^2 + A^3 + A^4$. (3) $\sum_{k=1}^{50} A^k$.

Ans : (1) I , (2) O , (3) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

【詳解】

(1) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$,

$$A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I^2 = I.$$

(2) 因為 $A^3 = A^2A = (-I)A = -A$, 所以

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = A + (-I) + (-A) + I = O.$$

(3) 因為 $A^4 = I$, 所以

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{50} A^k &= A + A^2 + \cdots + A^{50} \\
 &= \underbrace{(A + A^2 + A^3 + A^4) + \cdots + (A + A^2 + A^3 + A^4)}_{12 \text{ 個}} + A + A^2 \\
 &= \underbrace{O + \cdots + O}_{12 \text{ 個}} + A + A^2 \\
 &= A + A^2 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

【類題 14】

設矩陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 試以 I 表示 A^3 . (2) 求 A^{101} .

Ans : (1) I , (2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

【詳解】

$$(1) \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

$$(2) \quad A^{101} = (A^3)^{33} A^2 = (I)^{33} A^2 = IA^2 = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

【例題 15】 【常考題】

(1) 設 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，利用數學歸納法證明：對所有正整數 n ，

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

(2) 已知 $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，利用(1)求 A^{12} 。

Ans : (1) 見解析，(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

【詳解】

(1) ①當 $n=1$ 時， $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 顯然成立。

②設 $n=k$ 時，原式成立，即 $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$ 成立。

則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & \cos k\theta \sin \theta + \sin k\theta \cos \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & \sin k\theta \sin \theta - \cos k\theta \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(k+\theta) & -\sin(k+\theta) \\ \sin(k+\theta) & \cos(k+\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

也成立。

故由數學歸納法知：對所有正整數 n ， $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ 均成立。

(2) 將 A 改寫為 $\begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix}$ ，利用(1)的公式，得

$$A^{12} = \begin{bmatrix} \cos 1440^\circ & -\sin 1440^\circ \\ \sin 1440^\circ & \cos 1440^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

【類題 15】

已知 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，求 A^{20} 。

Ans : $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

【詳解】

因為 $A = \begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix}$ ，所以

$$A^{20} = \begin{bmatrix} \cos 6000^\circ & -\sin 6000^\circ \\ \sin 6000^\circ & \cos 6000^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

【例題 16】【配合課本例 14】【96 指甲】

有關矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 與矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $AB=BA$ ，(2) $A^2B=BA^2$ ，(3) $A^{11}B^3=B^6A^5$ ，(4) $AB^{12}=A^7$ ，(5) $(ABA)^{15}=AB^{15}A$ 。

Ans : (2)(4)(5)

【詳解】

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \text{ 爲旋轉矩陣,}$$

$$\theta = 60^\circ, B^6 = I_2.$$

$$(1) AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, AB \neq BA.$$

$$(2) A^2 = I_2, \text{ 故 } A^2 B = BA^2.$$

$$(3) A^{11} B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^6 A^5 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^{11} B^3 \neq B^6 A^5.$$

$$(4) AB^{12} = A = A^7.$$

$$(5) (ABA)^{15} = AB \text{ AAB AABA } \dots \text{ ABA} = AB^{15} A. (A^2 = I_2)$$

【類題 16】

設矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 選出正確的選項：

$$(1) AB = BA \quad (2) (AB)^2 = A^2 B^2 \quad (3) (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (4) A^2 = I$$

$$(5) A^2 B = BA^2.$$

Ans : (4)(5)

【詳解】

$$(1) \text{ 因爲 } AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以 $AB \neq BA$.

$$(2) \text{ 因爲 } AB \neq BA,$$

$$\text{所以 } (AB)^2 = ABAB \neq AAB B = A^2 B^2.$$

$$(3) \text{ 由矩陣乘法的性質, 得}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

$$\text{因爲 } AB \neq BA, \text{ 所以 } (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

(4) 由矩陣的乘法定義，得

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

(5) 因為 $A^2B = IB = B$, $BA^2 = BI = B$,
所以 $A^2B = BA^2$.

故選(4)(5) .

【例題 17】 【常考題】

設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. 試將方陣 $(I+A)^3$ 化為 $aI + bA$ 的形式

(a, b 為實數)，並求出 a, b 的值 .

Ans : $a=1, b=111$

【詳解】

$$\text{因為 } A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{bmatrix} = 9A,$$

$$\text{所以 } A^3 = A^2 \cdot A = 9A \cdot A = 9A^2 = 81A.$$

$$\text{又 } IA = AI = A;$$

由二項式定理，得

$$\begin{aligned} (I+A)^3 &= C_0^3 I^3 + C_1^3 I^2 A + C_2^3 I A^2 + C_3^3 A^3 = I + 3IA + 3I \cdot 9A + 81A \\ &= I + 3A + 27A + 81A = I + 111A. \end{aligned}$$

故 $a=1, b=111$.

【類題 17】

設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 試將 $(I+A)^2$ 表示成 $aI + bA$ (a, b 為實數) 的形式，並求出 a, b 的值 .

Ans : $a=1, b=12$

【詳解】

$$\text{因為 } A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = 10A,$$

且 $AI = IA = A$, 所以

$$(I+A)^2 = I^2 + 2IA + A^2 = I + 2A + 10A = I + 12A.$$

故 $a=1, b=12$.

【例題 18】 【常考題】

若 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $A = I + B$, 則

(1) 求矩陣 B , B^2 及 B^3 .

(2) 利用(1)及 $A = I + B$, 求 A^{10} 中所有元的和.

$$\text{Ans : (1) } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (2) 253$$

【詳解】

$$(1) \quad \text{因爲 } A = I + B, \text{ 所以 } B = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

再由矩陣的乘法, 得

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 因爲 $BI = IB = B$, 且 $B^n = O$ ($n \geq 3$),

所以由二項式定理, 得

$$\begin{aligned} A^{10} &= (I + B)^{10} \\ &= C_{10}^{10} I^{10} + C_{10}^1 I^9 B + C_{10}^2 I^8 B^2 + C_{10}^3 I^7 B^3 + \cdots + C_{10}^{10} B^{10} \\ &= I + 10B + 45B^2 + \underbrace{O + \cdots + O}_{8\text{個}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 45 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 20 & 210 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故所求爲 $1 + 20 + 210 + 0 + 1 + 20 + 0 + 0 + 1 = 253$.

【類題 18】

若 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $A = 2I + B$, 則

(1) 求矩陣 B , B^2 及 B^3 .

(2) 利用(1)及 $A = 2I + B$, 求 A^5 中所有元的和.

$$\text{Ans : (1) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (2) 816$$

【詳解】

(1) 因為 $A = 2I + B$, 所以 $B = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 因此

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 因為 $BI = IB = B$, 且 $B^n = O$ ($n \geq 3$),

所以由二項式定理, 得

$$\begin{aligned} A^5 &= (2I + B)^5 \\ &= C_0^5 (2I)^5 + C_1^5 (2I)^4 B + C_2^5 (2I)^3 B^2 + C_3^5 (2I)^2 B^3 + C_4^5 (2I) B^4 + C_5^5 B^5 \\ &= 32I + 80B + 80B^2 + O + O + O \\ &= 32 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 32 & 80 & 160 \\ 0 & 32 & 240 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故所求為 $32 + 80 + 400 + 0 + 32 + 240 + 0 + 0 + 32 = 816$.

重要精選考題

基礎題

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $2A - B$.

Ans : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

【詳解】

$$2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. 已知 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ 都是 3×2 階矩陣,
且 $a_{ij} = i + j$, $b_{ij} = 3i - 2j$, 求 $A + B$.

Ans : $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

【詳解】

因為 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$, 所以

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}.$$

3. 已知實數 a, b, c, d 滿足 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

求 a, b, c, d 的值.

Ans : $a = 1, b = -4, c = 1, d = -3$

【詳解】

$$\begin{aligned}
 \text{因爲 } a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 2a & -b \\ 5c & d \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & -b \\ 5c & d \end{bmatrix}$. 由矩陣相等的定義，得

$$2a=2, -b=4, 5c=5, d=-3,$$

解得 $a=1, b=-4, c=1, d=-3$.

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 求 $2A - 3B$.

(2) 若矩陣 X 滿足 $5X - A = B + 3A + 3X$ ，求 X .

Ans : (1) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

【詳解】

$$(1) \quad 2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} .$$

(2) 因爲 $5X - A = B + 3A + 3X$,

所以 $2X = 4A + B$.

$$\text{故 } X = 2A + \frac{1}{2}B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} .$$

5. 已知 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 A, B .

Ans : $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

【詳解】

由題意，得

$$A = 2(A + B) - (A + 2B)$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B = (A + 2B) - (A + B)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

6. 求下列各矩陣的乘積：

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ans : (1)} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -5 \\ 18 & -4 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

【詳解】

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -5 \\ 18 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. 已知矩陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 A 。

$$\text{Ans : } \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

【詳解】

由題意，得 A 為 1×2 階矩陣。設 $A = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ ，則

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y & 3x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{由 } x+y=3, \quad 3x+2y=7,$$

$$\text{解得 } x=1, \quad y=2.$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 $(A^2 - B^2) - (A + B)(A - B)$ 。

$$\text{Ans : } \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

【詳解】

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (A^2 - B^2) - (A^2 - AB + BA - B^2) \\
&= A^2 - B^2 - A^2 + AB - BA + B^2 \\
&= AB - BA \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

9. 已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ 滿足 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 求實數 a, b 的值.

Ans : $a=1, b=2$

【詳解】

因為 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 所以 $AB = BA$, 即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6a+3b & 2a+9b \\ 3a+12 & 4a+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a+6 & 6b+8 \\ 3a+27 & 3b+36 \end{bmatrix}.$$

由矩陣相等的定義, 可列得 $\begin{cases} 3b+36=42 \\ 3a+27=30 \end{cases}$.

解得 $a=1, b=2$.

進階題

10. 設 A, B 均為二階方陣, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 選出正確的選項:

- (1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 恆成立
- (2) $(A+I)(A-I) = A^2 - I$ 恆成立
- (3) $(AB)^2 = A^2B^2$ 恆成立
- (4) 若 $A^2 = O$, 則 $A = O$
- (5) 若 $A^2 = I$, 則 $A = I$ 或 $A = -I$.

Ans : (2)

【詳解】

(1) 因爲 $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$,
且 AB 不一定等於 BA , 所以此等式不恆成立.

(2) 因爲 $AI = IA = A$, 且 $I^2 = I$, 所以
 $(A+I)(A-I) = A^2 - AI + IA - I^2 = A^2 - I$.

(3) 因爲 $(AB)^2 = ABAB$,
且 AB 不一定等於 BA , 所以此等式不恆成立.

(4) 錯誤. 例如 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \neq O$,

$$\text{但滿足 } A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

(5) 錯誤. 例如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 滿足 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

故選(2).

11. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ 滿足 $A^2 = A$, 求實數 a, b 的值.

Ans : $a=2, b=-1$ 或 $a=-1, b=2$

【詳解】

$$\text{計算 } A^2 = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-2 & 2a+2b \\ -a-b & -2+b^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{因爲 } A^2 = A, \text{ 所以 } \begin{cases} a^2-2=a \\ 2a+2b=2 \\ -a-b=-1 \\ -2+b^2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \\ a+b=1 \\ b^2-b-2=0 \end{cases}$$

解得 $a=2, b=-1$ 或 $a=-1, b=2$.

12. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求下列各矩陣:

(1) A^2 . (2) A^3 . (3) $(I+A)^3$.

$$\text{Ans : (1) } \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ (2) } \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \text{ (3) } \begin{bmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{bmatrix}$$

【詳解】

$$(1) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \quad A^3 = A^2 A = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(3) 因爲 $IA = AI = A$ ，所以

$$\begin{aligned} & (I+A)^3 \\ &= I^3 + 3I^2A + 3IA^2 + A^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

13. 已知 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

(1) 求 A^2 . (2) 若 $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ，則 $\theta = ?$

Ans : (1) $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$, (2) 90°

【詳解】

(1) 利用矩陣乘法的定義及二倍角公式，得

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ 2\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 利用(1)的結果，得

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} \cos 4\theta & -\sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \cos 4\theta \end{bmatrix}.$$

因爲 $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，所以 $\cos 4\theta = 1$ ， $\sin 4\theta = 0$.

又 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ，即 $0^\circ < 4\theta < 720^\circ$ ，

因此 $4\theta = 360^\circ$ ，故 $\theta = 90^\circ$.

14. 已知 $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, 求滿足 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小正整數 n .

Ans : 12

【詳解】

因為 $A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$,

所以 $A^n = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ \times n) & -\sin(30^\circ n) \\ \sin(30^\circ \times n) & \cos(30^\circ n) \end{bmatrix}$.

因為 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

所以 $30^\circ \times n$ 為 360° 的倍數, 即 n 為 12 的倍數.

故正整數 n 的最小值為 12.

15. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 試將方陣 $(I + \frac{1}{3}A)^8$ 化為 $aI + bA$ 的形式

(a, b 為實數), 並求 a, b 的值.

Ans : $a=1, b=85$

【詳解】

由 $A^2 = 3A$, $A^3 = A^2 \cdot A = 3A \cdot A = 3A^2 = 3^2A$,

推得 $A^k = 3^{k-1}A$, k 為正整數.

又因為 $AI = IA = A$, 所以

$$\begin{aligned} (I + \frac{1}{3}A)^8 &= C_0^8 I^8 + C_1^8 I^7 (\frac{1}{3}A) + C_2^8 I^6 (\frac{1}{3}A)^2 + \cdots + C_8^8 (\frac{1}{3}A)^8 \\ &= I + C_1^8 (\frac{1}{3}A) + C_2^8 (\frac{1}{3^2}A)^2 + \cdots + C_8^8 (\frac{1}{3^8}A^8) \\ &= I + C_1^8 (\frac{1}{3}A) + C_2^8 (\frac{1}{3^2} \cdot 3A) + \cdots + C_8^8 (\frac{1}{3^8} \cdot 3^7 A) \\ &= I + C_1^8 (\frac{1}{3}A) + C_2^8 (\frac{1}{3}A) + \cdots + C_8^8 (\frac{1}{3}A) \\ &= I + \frac{1}{3}(C_1^8 + C_2^8 + \cdots + C_8^8)A \end{aligned}$$

$$= I + \frac{1}{3}(2^8 - C_0^8)A$$

$$= I + 85A .$$

故 $a = 1$, $b = 85$.

16. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{9 \times 9}$, 其中 $a_{ij} = 2i + j^2$, 求矩陣 A 之所有元的總和 .

Ans : 3375

【詳解】

先計算第 1 列的和：

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{19} \\ &= (2 \times 1 + 1^2) + (2 \times 1 + 2^2) + \cdots + (2 \times 1 + 9^2) \\ &= 9 \times 2 \times 1 + (1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) \end{aligned}$$

再計算第 2 列的和：

$$\begin{aligned} & a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{29} \\ &= (2 \times 2 + 1^2) + (2 \times 2 + 2^2) + \cdots + (2 \times 2 + 9^2) \\ &= 9 \times 2 \times 2 + (1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) \end{aligned}$$

⋮

依此類推得第 9 列的和為

$$\begin{aligned} & a_{91} + a_{92} + \cdots + a_{99} \\ &= (2 \times 9 + 1^2) + (2 \times 9 + 2^2) + \cdots + (2 \times 9 + 9^2) \\ &= 9 \times 2 \times 9 + (1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) \end{aligned}$$

故所有元的總和為

$$\begin{aligned} & 9 \times 2 \times (1 + 2 + \cdots + 9) + 9 \times (1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) \\ &= 9 \times 2 \times \frac{9(9+1)}{2} + 9 \times \frac{9(9+1)(2 \times 9 + 1)}{6} \\ &= 810 + 2565 = 3375 . \end{aligned}$$

17. 實驗室培養兩種菌，令 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 分別代表這兩種培養菌在時間點 n 的數量，且彼此有如下的關係： $a_{n+1} = 2(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = 2b_n$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) . 若

二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ (其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$) ,

求實數 a, b, c, d 的值 .

Ans : $a = 8, b = 24, c = 0, d = 8$

【詳解】

根據題目的關係式，得

$$\begin{aligned}a_{n+3} &= 2(a_{n+2} + b_{n+2}) \\&= 2(2(a_{n+1} + b_{n+1}) + 2b_{n+1}) \\&= 4a_{n+1} + 8b_{n+1} \\&= 8(a_n + b_n) + 8 \cdot 2b_n \\&= 8a_n + 24b_n,\end{aligned}$$

$$b_{n+3} = 2b_{n+2} = 2 \cdot 2b_{n+1} = 2 \cdot 2 \cdot 2b_n = 8b_n.$$

利用矩陣表示得

$$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a_n + 24b_n \\ 8b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

故 $a=8$, $b=24$, $c=0$, $d=8$.