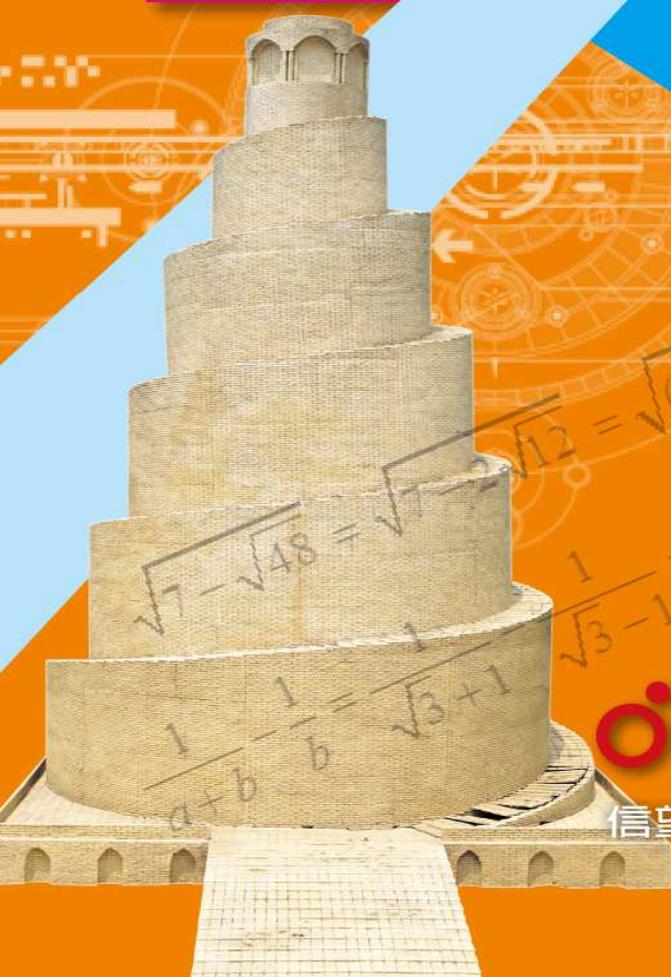


高中數學

進階
講義

拋物線

陳清海 老師



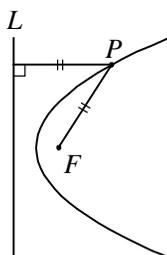
信望愛文教基金會

ok441 拋物線

主題一、拋物線的幾何定義

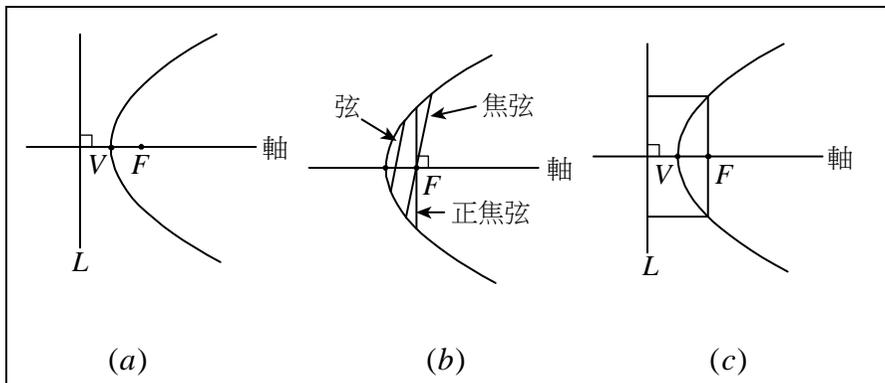
1. 拋物線的定義：

設 L 是平面上的一直線， F 是不在 L 上的一點。平面上到 L 與 F 等距離的所有點 P 所形成的圖形，稱為拋物線，而 L 與 F 分別稱為此拋物線的準線與焦點。



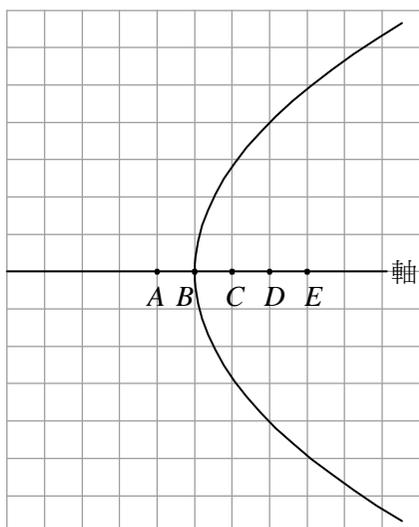
2. 拋物線的圖形要素：

- (1) 對稱軸：通過焦點 F 且與準線 L 垂直的直線稱為對稱軸，簡稱軸。
- (2) 頂點：對稱軸和拋物線的交點 V 稱為頂點。
- (3) 焦距：頂點 V 和焦點 F 的距離 \overline{VF} 稱為焦距。
- (4) 弦：拋物線上任取兩相異點的連接線段稱為弦。
- (5) 正焦弦：過焦點的弦稱為焦弦，當焦弦與軸垂直時，稱為正焦弦。正焦弦的長恰為焦距的 4 倍（如下圖(c)）。



【例題 1】

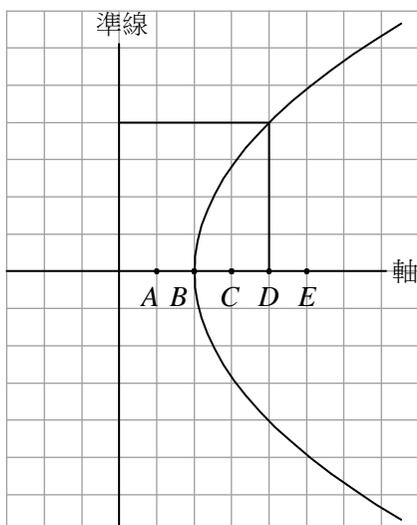
下圖為一拋物線的部分圖形，且 A, B, C, D, E 五個點中有一為其焦點。問：哪一點是其焦點？



Ans : D

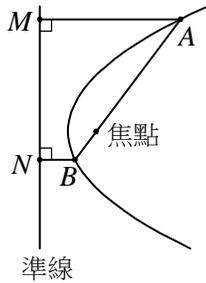
【詳解】

因為正焦弦的長為焦距的 4 倍，
所以由下圖可知拋物線的焦點為 D 。



【類題 1】

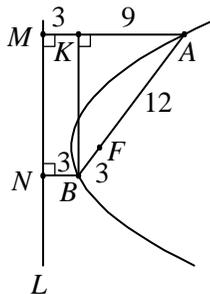
設 \overline{AB} 是拋物線的焦弦， \overline{AM} ， \overline{BN} 分別為點 A ， B 到準線的垂線，如下圖所示。已知 $\overline{AM} = 12$ ， $\overline{BN} = 3$ ，求 \overline{MN} 的長。



Ans : 12

【詳解】

設拋物線的焦點為 F ，準線為 L ，並作線段 $\overline{BK} \perp \overline{AM}$ ，如下圖所示。



由拋物線的定義可知：

$$\overline{AF} = \overline{AM} = 12, \quad \overline{BF} = \overline{BN} = 3,$$

並且由圖可知： $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{AK} = 9$ 。

因為 $\triangle ABK$ 是一個直角三角形，

$$\text{所以 } \overline{BK} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AK}^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$$

因此 $\overline{MN} = \overline{BK} = 12$ 。

主題二、拋物線的標準式

1. 頂點在原點之拋物線的標準式：

表中各拋物線之焦點與頂點的距離均為 $|c|$ （焦距為 $|c|$ ），正焦弦長為 $4|c|$ 。當拋物線的對稱軸與坐標軸平行，但是頂點 (h, k) 不在原點時，可利用平移的概念了解方程式與各要素間的關係

標準式

焦點

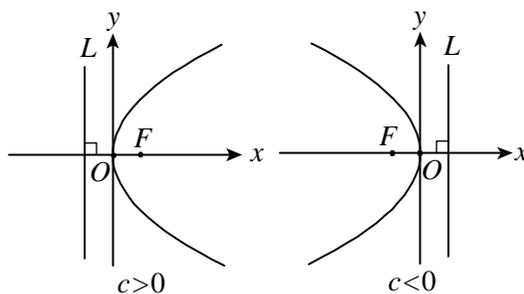
準線

圖形

$$y^2 = 4cx$$

$$F(c, 0)$$

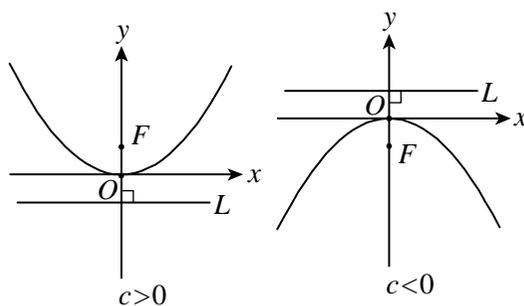
$$L: x = -c$$



$$x^2 = 4cy$$

$$F(0, c)$$

$$L: y = -c$$



2. 求拋物線標準式的三個條件：

- (1) 頂點 (h, k) .
- (2) c （由焦距求 $|c|$ ，由開口的方向判斷 c 的正負）.
- (3) 開口方向（左右開口型或上下開口型）.

由(1)(2)(3)即可求得拋物線的標準式。

左右開口

上下開口

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

$c > 0$ 開口向右 $c < 0$ 開口向左 $c > 0$ 開口向上 $c < 0$ 開口向下

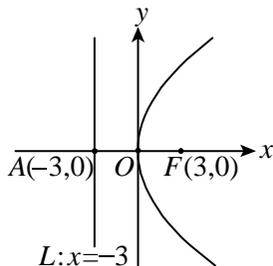
【例題 2】

- (1) 求焦點為 $F(3, 0)$ ，準線為 $L: x = -3$ 的拋物線方程式。
 (2) 求頂點為 $V(0, 0)$ ，焦點為 $F(0, -2)$ 的拋物線方程式。

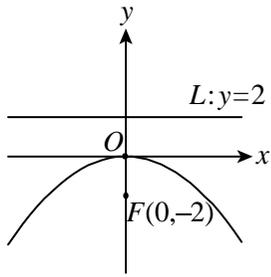
Ans : (1) $y^2 = 12x$, (2) $x^2 = -8y$

【詳解】

- (1) 如下圖所示，因為頂點是 \overline{AF} 的中點，
 所以頂點為 $(0, 0)$ ，
 又由焦點 $F(3, 0)$ ，可得 $c = 3$ 。
 因為開口向右之拋物線的標準式為 $y^2 = 4cx$ ，
 所以此拋物線的方程式為 $y^2 = 12x$ 。



- (2) 如下圖所示，因為頂點為 $(0, 0)$ ，焦點為 $F(0, -2)$ ，



所以 $c = -2$ ，準線為 $L: y = 2$ 。
 因為拋物線的開口向下，
 所以由拋物線的標準式 $x^2 = 4cy$ ，
 可得此拋物線的方程式為 $x^2 = -8y$ 。

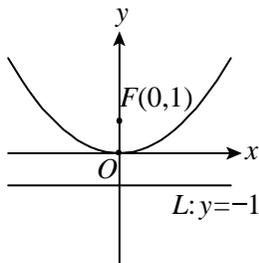
【類題 2】

- (1) 求頂點為 $V(0, 0)$ ，準線為 $L: y = -1$ 的拋物線方程式。
- (2) 求焦點為 $F(-4, 0)$ ，準線為 $L: x = 4$ 的拋物線方程式。

Ans : (1) $x^2 = 4y$, (2) $y^2 = -16x$

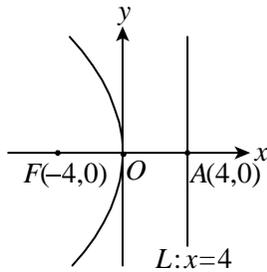
【詳解】

- (1) 如下圖所示，因為頂點為 $(0, 0)$ ，準線為 $y = -1$ ，



所以焦點為 $F(0, 1)$ ， $c = 1$ 。
 因為拋物線的開口向上，
 所以由拋物線的標準式 $x^2 = 4cy$ ，
 可得此拋物線的方程式為 $x^2 = 4y$ 。

- (2) 如下圖所示，因為頂點是 \overline{AF} 的中點，
 所以頂點為 $(0, 0)$ ，



又由焦點 $F(-4, 0)$ ，可得 $c = -4$ 。
 因為開口向左之拋物線的標準式為 $y^2 = 4cx$ ，
 所以此拋物線的方程式為 $y^2 = 16x$ 。

【例題 3】

求拋物線 $y^2 = x$ 的頂點、焦點坐標與準線方程式。

Ans：頂點 $(0,0)$ ，焦點 $(\frac{1}{4}, 0)$ ，準線 $x = -\frac{1}{4}$

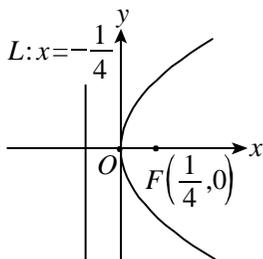
【詳解】

將方程式 $y^2 = x$ 改寫成 $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$ ，

可知拋物線的頂點為 $(0, 0)$ ， $c = \frac{1}{4}$ 且開口向右。

焦點 F 的坐標 $(c, 0) = (\frac{1}{4}, 0)$ ，

準線 $L: x = -c$ ，即 $x = -\frac{1}{4}$ 。



【類題 3】

求拋物線 $x^2 = -12y$ 的頂點、焦點坐標與準線方程式。

Ans：頂點(0, 0)，焦點(0, -3)，準線 $y = 3$

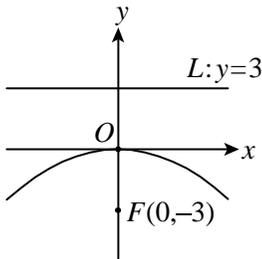
【詳解】

將方程式 $x^2 = -12y$ 改寫成 $x^2 = 4 \cdot (-3) \cdot y$,

可知拋物線的頂點為(0, 0)， $c = -3$ 且開口向下。

焦點 F 的坐標(0, c) = (0, -3)，

準線 $L: y = -c$ ，即 $y = 3$ 。

**【例題 4】**

(1) 求焦點為 $F(4, 1)$ ，準線為 $L: x = -2$ 的拋物線方程式。

(2) 求頂點為 $V(2, 1)$ ，準線為 $L: y = 3$ 的拋物線方程式。

Ans：(1) $(y - 1)^2 = 12(x - 1)$ ，(2) $(x - 2)^2 = -8(y - 1)$

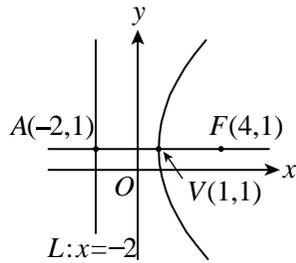
【詳解】

(1) 如下圖所示，頂點 V 為 \overline{AF} 的中點，

可得其坐標為(1, 1)，

又由焦點 $F(4, 1)$ 、頂點 $V(1, 1)$ ，

可得 $c = 4 - 1 = 3$ 。



因為拋物線開口向右，

所以由拋物線的標準式 $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ ，

可得其方程式為 $(y - 1)^2 = 4 \cdot 3 \cdot (x - 1)$ ，

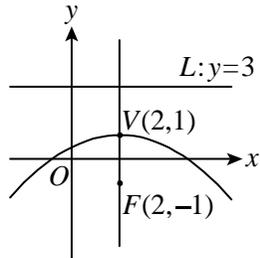
即 $(y - 1)^2 = 12(x - 1)$ 。

(2) 如下圖所示，先計算 V 到 L 的距離為 2。

因為頂點 V 在準線 L 的下方，

所以拋物線開口向下，

且得 $c = -2$ ，焦點 F 為 $(2, -1)$ 。



因為拋物線開口向下，

所以由拋物線的標準式 $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ，

可得其方程式為 $(x - 2)^2 = -8(y - 1)$ 。

【類題 4】

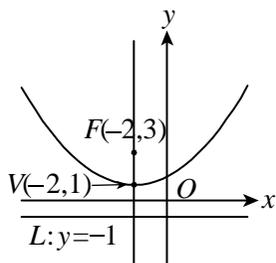
(1) 求焦點為 $F(-2, 3)$ ，頂點為 $V(-2, 1)$ 的拋物線方程式。

(2) 求焦點為 $F(-3, -2)$ ，準線為 $L: x = 1$ 的拋物線方程式。

Ans : (1) $(x + 2)^2 = 8(y - 1)$ ，(2) $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$

【詳解】

- (1) 如下圖所示，由焦點 $F(-2, 3)$ 、頂點 $(-2, 1)$ ，
可得 $c = 3 - 1 = 2$ ，且拋物線開口向上。



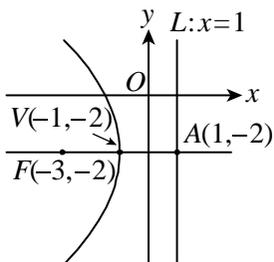
由開口向上之拋物線的標準式為

$$(x - h)^2 = 4c(y - k),$$

可得其方程式為 $(x + 2)^2 = 4 \cdot 2 \cdot (y - 1)$ ，

$$\text{即 } (x + 2)^2 = 8(y - 1) .$$

- (2) 如下圖所示，頂點 V 為 \overline{AF} 的中點，
可得其坐標為 $(-1, -2)$ ，
又由焦點 $F(-3, -2)$ 、頂點 $V(-1, -2)$ ，
可得 $c = (-3) - (-1) = -2$ ，
且拋物線開口向左。



由開口向左之拋物線的標準式為

$$(y - k)^2 = 4c(x - h),$$

可得其方程式為

$$(y - (-2))^2 = 4 \cdot (-2) \cdot (x - (-1)),$$

$$\text{即 } (y + 2)^2 = -8(x + 1) .$$

【例題 5】

求拋物線 $(y+2)^2=12(x-1)$ 的焦點坐標與準線方程式。

Ans：焦點 $(4, -2)$ ，準線 $x=-2$

【詳解】

將方程式 $(y+2)^2=12(x-1)$

依標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$

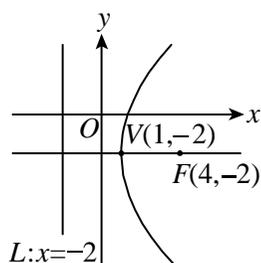
改寫成 $(y-(-2))^2=4\cdot 3\cdot(x-1)$ ，

得拋物線的頂點為 $(1, -2)$ ， $c=3$ ，

且其開口向右。

焦點 F 的坐標 $(h+c, k)=(4, -2)$ ，

準線 $L: x=h-c$ ，即 $x=-2$ 。

**【類題 5】**

求拋物線 $(x-1)^2=-4(y-2)$ 的焦點坐標與準線方程式。

Ans：焦點 $(1, 1)$ ，準線 $y=3$

【詳解】

將方程式 $(x-1)^2=-4(y-2)$

依標準式 $(x-h)^2=4c(y-k)$

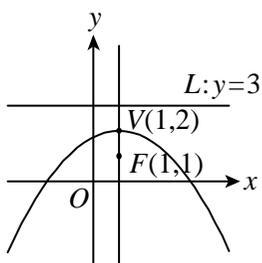
改寫成 $(x-1)^2=4\cdot(-1)\cdot(y-2)$ ，

得拋物線的頂點為 $(1, 2)$ ， $c=-1$ ，

且其開口向下。

焦點 F 的坐標 $(h, k+c)=(1, 1)$ ，

準線 $L: y=k-c$ ，即 $y=3$ 。

**【例題 6】**

求拋物線 $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$ 的頂點坐標與準線方程式。

Ans：頂點 $(-2, -1)$ ，準線 $y=0$

【詳解】

將 $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$ 配方可得

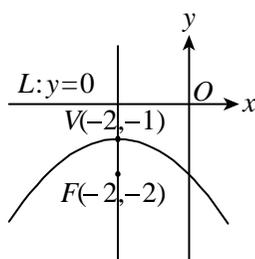
$$(x+2)^2 = -4y-4,$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = -4(y+1),$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 4 \cdot (-1) \cdot (y+1),$$

並得拋物線的頂點為 $(-2, -1)$ ， $c = -1$ ，

準線 $L: y = k - c$ ，即 $y = 0$ (x 軸)。

**【類題 6】**

求拋物線 $y^2 + 2y + 8x - 23 = 0$ 的頂點坐標與準線方程式。

Ans：頂點 $(3, -1)$ ，準線 $x=5$

【詳解】

將 $y^2 + 2y + 8x - 23 = 0$ 配方可得

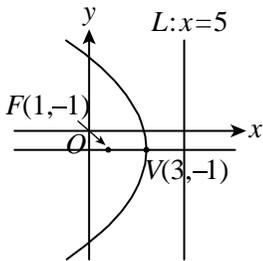
$$(y + 1)^2 = -8x + 24,$$

$$\Rightarrow (y + 1)^2 = -8(x - 3),$$

$$\Rightarrow (y + 1)^2 = 4 \cdot (-2) \cdot (x - 3),$$

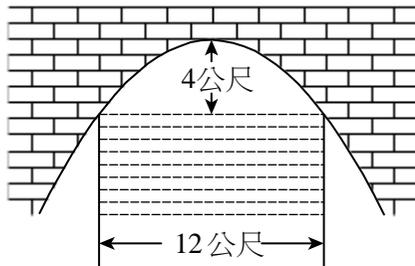
並得拋物線的頂點為 $(3, -1)$ ， $c = -2$ ，

準線 $L: x = h - c$ ，即 $x = 5$ 。



【例題 7】

下圖是一座拋物線造型的拱橋。已知此拋物線以通過最高點的鉛直線為對稱軸，當水面離最高點 4 公尺時，水面寬為 12 公尺，求水面離最高點 2 公尺時的水面寬度。



Ans : $6\sqrt{2}$ 公尺

【詳解】

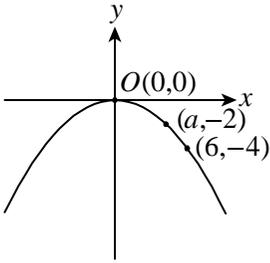
設拋物線的頂點為原點 O ，開口向下，

其方程式為 $(x - 0)^2 = 4c(y - 0)$ 。

由題意可知：

拋物線的圖形通過點 $(6, -4)$ ， $(a, -2)$ ，

如下圖所示。



將 $(6, -4)$ 代入 $(x-0)^2=4c(y-0)$,

得 $36=-16c$, 解得 $c=-\frac{9}{4}$,

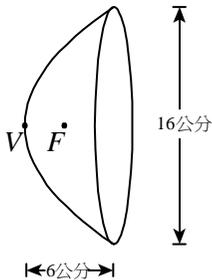
拋物線的方程式為 $x^2=-9y$.

再將 $(a, -2)$ 代入 $x^2=-9y$, 解得 $a=\pm 3\sqrt{2}$,

故可得水面寬度為 $6\sqrt{2}$ 公尺.

【類題 7-1】

已知探照燈內的反射鏡是一個拋物面，此曲面由拋物線繞軸旋轉而成，其縱切面是拋物線的一部分．已知探照燈的燈口直徑為 16 公分，燈的深度為 6 公分，如下圖所示，求此探照燈的焦距．

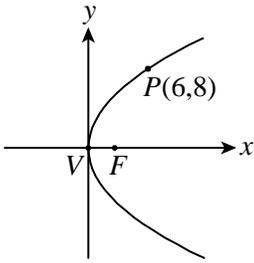


Ans : $\frac{8}{3}$ 公分

【詳解】

依題意假設反射鏡縱切面的拋物線方程式為 $y^2=4cx$,

且拋物線上有一點 $P(6, 8)$ ，如下圖所示．

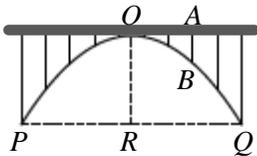


將 P 點坐標代入 $y^2 = 4cx$ ，解得 $c = \frac{8}{3}$ ，

因此探照燈的焦距為 $\frac{8}{3}$ 公分。

【類題 7-2】

有一座拋物線形的拱橋，橋面與拱門之間用很多根與橋面垂直的柱子固定，如下圖所示。已知通過拱門最高點的鉛直線 OR 是拋物線的對稱軸，且 $\overline{OR} = 8$ 公尺，此時水面寬 $\overline{PQ} = 20$ 公尺，求與中心線 \overline{OR} 相距 5 公尺之柱子 \overline{AB} 的長。



Ans : 2 公尺

【詳解】

以 R 點為原點， \overrightarrow{RQ} 為 x 軸正向，

\overrightarrow{RO} 為 y 軸正向建立直角坐標系。

因為 $\overline{RQ} = \overline{RP} = 10$ ，

所以可得 O ， P ， Q 三點的坐標分別為

$O(0, 8)$ ， $P(-10, 0)$ ， $Q(10, 0)$ 。

由拋物線的標準式，可得拋物線的方程式為

$$4c(y-8)=x^2.$$

將 Q 點坐標代入得到

$$4c(0-8)=10^2, \text{ 即 } -32c=100,$$

$$\text{解得 } c=-\frac{25}{8}.$$

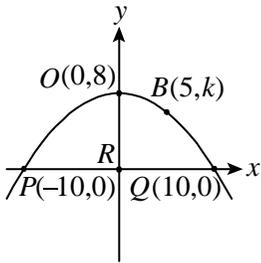
$$\text{故拋物線方程式為 } -\frac{25}{2}(y-8)=x^2.$$

由題意可設 B 點的坐標為 $(5, k)$.

代入拋物線方程式得

$$-\frac{25}{2}(k-8)=5^2 \Rightarrow -\frac{25}{2}(k-8)=25,$$

解得 $k=6$. 故 $\overline{AB}=8-6=2$ (公尺) .



【例題 8】

已知 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+4|$ 的圖形是一個拋物線，關於此拋物線，

選出正確的選項：

- (1) 頂點為 $(2, 0)$ (2) 焦點為 $(-4, 0)$ (3) 準線方程式為 $x=-4$
 (4) 軸為 x 軸 .

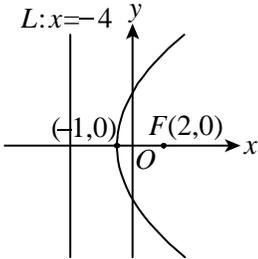
Ans : (3)(4)

【詳解】

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+4|$ 的意思是：

動點 $P(x, y)$ 到定點 $F(2, 0)$ 與到

直線 $L: x = -4$ 的距離相等，
 因此其圖形為以 $(2, 0)$ 為焦點，
 $x = -4$ 為準線的拋物線，如下圖所示。



由上圖可知：頂點為 $(-1, 0)$ ，軸為 x 軸。
 由上面的討論可知：正確的選項為(3)(4)。

【類題 8】

已知 $\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = |y+2|$ 的圖形是一個拋物線，求此拋物線的頂點、焦點坐標，準線與對稱軸的方程式。

Ans：頂點 $(-1, 0)$ ，焦點 $(-1, 2)$ ，準線 $y = -2$ ，對稱軸 $x = -1$

【詳解】

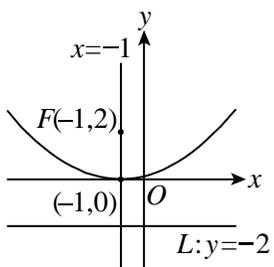
$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = |y+2|$ 的意思是：

動點 $P(x, y)$ 到定點 $F(-1, 2)$ 與到

直線 $L: y = -2$ 的距離相等，

因此其圖形為以 $(-1, 2)$ 為焦點，

$y = -2$ 為準線的拋物線，如下圖所示。



由上圖可知：

此拋物線的頂點為 $(-1, 0)$ ，焦點為 $(-1, 2)$ ，
準線為 $y = -2$ ，對稱軸為 $x = -1$ 。

主題三、過三點求拋物線方程式

過三點求拋物線方程式的假設法：

- (1) 軸平行 y 軸（即上下開口型）的拋物線，可設方程式為

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0).$$

- (2) 軸平行 x 軸（即左右開口型）的拋物線，可設方程式為

$$x = Ay^2 + By + C \quad (A \neq 0).$$

【例題 9】

求軸與 y 軸平行，且通過 $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ ， $(3, 2)$ 三點的拋物線方程式及其焦點。

Ans：方程式 $y = x^2 - 3x + 2$ ，焦點 $(\frac{3}{2}, 0)$

【詳解】

因為拋物線的軸與 y 軸平行，
所以假設此拋物線的方程式為
 $y = Ax^2 + Bx + C$ 。

將 $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ ， $(3, 2)$ 三點坐標代入

$$y = Ax^2 + Bx + C, \text{ 得 } \begin{cases} 0 = A + B + C \\ 0 = 4A + 2B + C \\ 2 = 9A + 3B + C \end{cases}$$

解得 $A=1$ ， $B=-3$ ， $C=2$ ，

故此拋物線的方程式為 $y = x^2 - 3x + 2$ 。

將 $y = x^2 - 3x + 2$ 配方改寫成

$$4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (y + \frac{1}{4}) = (x - \frac{3}{2})^2,$$

可得拋物線的頂點為 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ ，

$c = \frac{1}{4}$ ，其圖形開口向上，

故其焦點為 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = (\frac{3}{2}, 0)$ 。

【另解】

設 $f(x) = k(x-1)(x-2)$ ，

$C(3, 2)$ 代入得 $k(3-1)(3-2) = 2$

$\Rightarrow k = 1$ 。

故 $f(x) = (x-1)(x-2)$ 。

【再解】

利用拉格蘭日插值法：

$$f(x) = 0 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

即 $f(x) = (x-1)(x-2)$.

【類題 9】

求軸與 x 軸平行，且通過 $(3, 1)$ ， $(3, 2)$ ， $(1, 3)$ 三點的拋物線方程式及其焦點。

Ans： 方程式 $x = -y^2 + 3y + 1$ ，焦點 $(3, \frac{3}{2})$

【詳解】

因為拋物線的軸與 x 軸平行，
所以假設此拋物線的方程式為

$$x = Ay^2 + By + C.$$

將 $(3, 1)$ ， $(3, 2)$ ， $(1, 3)$ 三點坐標代入

$$x = Ay^2 + By + C, \text{ 得 } \begin{cases} 3 = A + B + C \\ 3 = 4A + 2B + C \\ 1 = 9A + 3B + C \end{cases}$$

解得 $A = -1$ ， $B = 3$ ， $C = 1$ ，

故此拋物線的方程式為 $x = -y^2 + 3y + 1$ 。

將 $x = -y^2 + 3y + 1$ 配方改寫成

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{13}{4}\right) = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2,$$

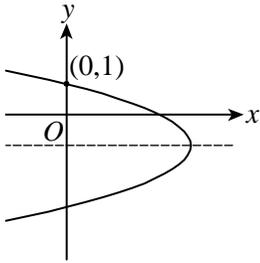
可得拋物線的頂點為 $\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{2}\right)$ ， $c = -\frac{1}{4}$ ，

其圖形開口向左，

故其焦點為 $\left(\frac{13}{4} - \frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$ 。

【例題 10】

若拋物線 $x = ay^2 + by + c$ 通過點 $(0, 1)$ ，且其圖形如下圖所示，則下列各數哪些為負數？ (1) a (2) b (3) c (4) $b^2 - 4ac$ (5) $a + b + c$.



Ans : (1)(2)

【詳解】

(1) 因為拋物線的開口向左，所以 $a < 0$.

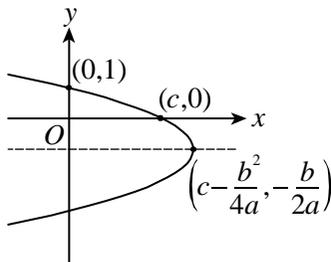
(2) 將拋物線方程式以 y 配方，

$$\text{得 } x = ay^2 + by + c = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

可知拋物線的頂點坐標為 $\left(c - \frac{b^2}{4a}, \frac{b}{2a}\right)$.

由圖形得知，拋物線的頂點在 x 軸下方，

即 $-\frac{b}{2a} < 0$. 因此， $b < 0$.



(3) 因為圖形通過點 $(c, 0)$ ，所以由圖形可知 $c > 0$.

(4) 將 $x = ay^2 + by + c$ 與 $x = 0$ (y 軸) 聯立, 得

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 即 } ay^2 + by + c = 0.$$

由圖形得知, 拋物線與 y 軸相交於兩點,

即 $ay^2 + by + c = 0$ 有兩個解.

因此, 判別式 $b^2 - 4ac > 0$.

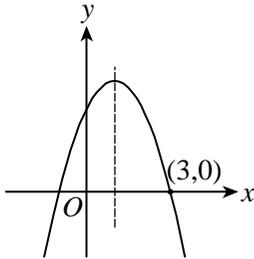
(5) 將 $(0, 1)$ 代入方程式得 $a + b + c = 0$.

由上面的討論可知: 正確的選項為(1)(2).

【類題 10】

若拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 過點 $(3, 0)$, 且其圖形如下圖所示, 則下列各數哪些為負數?

(1) a (2) b (3) c (4) $b^2 - 4ac$ (5) $4a + 2b + c$.



Ans : (1)

【詳解】

(1) 因為拋物線的開口向下, 所以 $a < 0$.

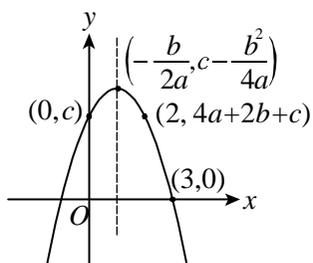
(2) 將拋物線方程式以 x 配方,

$$\text{得 } y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

$$\text{可知拋物線的頂點坐標為 } \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

由圖形得知, 拋物線的頂點在 y 軸右方,

即 $-\frac{b}{2a} > 0$. 因此, $b > 0$.



(3) 因為圖形通過點 $(0, c)$, 所以由圖形可知 $c > 0$.

(4) 將 $y = ax^2 + bx + c$ 與 $y = 0$ (x 軸) 聯立, 得

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 即 } ax^2 + bx + c = 0 .$$

由圖形得知, 拋物線與 x 軸相交於兩點,

即 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩個解 .

因此, 判別式 $b^2 - 4ac > 0$.

(5) 將 $x = 2$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$, 得到 $4a + 2b + c$.

由圖形可知點 $(2, 4a + 2b + c)$ 在 x 軸上方,

因此 $4a + 2b + c > 0$.

由上面的討論可知: 正確的選項為(1) .

【例題 11】

求拋物線 $y^2 = 16x$ 上與直線 $4x - 3y + 24 = 0$ 距離最短之點的坐標 .

Ans : $(\frac{9}{4}, 6)$

【詳解】

設拋物線 $y^2 = 16x$ 上的點坐標為 $(t^2, 4t)$.

利用點到直線的距離公式,

得點 $(t^2, 4t)$ 到直線 $4x - 3y + 24 = 0$ 的距離為

$$\frac{|4t^2 - 12t + 24|}{5} = \frac{4}{5}|t^2 - 3t + 6| = \frac{4}{5}\left|(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4}\right| \geq \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{4} = 3.$$

當 $t = \frac{3}{2}$ 時， $\frac{|4t^2 - 12t + 24|}{5}$ 有最小值 3，

此時該點的坐標為 $(\frac{9}{4}, 6)$ 。

【類題 11】

求拋物線 $y = x^2$ 上與直線 $y = x - 1$ 距離最短之點的坐標。

Ans : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

【詳解】

設拋物線 $y = x^2$ 上的點坐標為 (t, t^2) 。

利用點到直線的距離公式，

得點 (t, t^2) 到直線 $y = x - 1$ 的距離為

$$\frac{|t - t^2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|t^2 - t + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}|}{\sqrt{2}} \geq \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

當 $t = \frac{1}{2}$ 時， $\frac{|t - t^2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 有最小值 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ ，

此時該點的坐標為 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 。

主題四、軌跡方程式

設動點的坐標為 (x, y) ，由題意找出 x ， y 的關係式，即為動點所成圖形的方程式(或稱為動點的軌跡方程式)。

【例題 12】

求與圓 $C : (x+4)^2 + y^2 = 4$ 外切，且與直線 $L : x-2=0$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式。

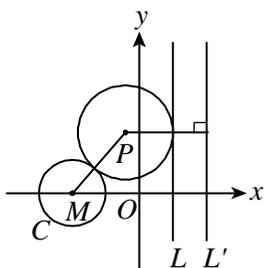
Ans : $y^2 = -16x$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 M 為 $(-4, 0)$ ，半徑為 2。

假設與圓 C 外切，且與直線 L 相切之圓的

圓心為 P ，半徑為 r 。



因為所求的圓與圓 C 外切，所以 $\overline{PM} = r + 2$ ，

又因為所求的圓與直線 L 相切，所以 $d(P, L) = r$ 。

令直線 $L' : x - 4 = 0$ 。

因為 $d(P, L') = r + 2$ ，所以 $\overline{PM} = d(P, L')$ ，

即點 P 在以 M 為焦點，直線 L' 為準線的拋物線上，

且拋物線的頂點為 $(0, 0)$ ，焦距為 4。

故由拋物線的標準式，

得其方程式為 $y^2 = 4 \cdot (-4)x$ ，即 $y^2 = -16x$ 。

【類題 12】

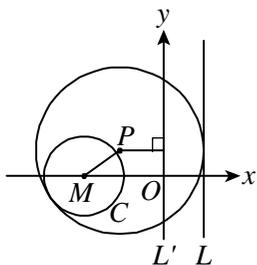
求與圓 $C : (x+4)^2 + y^2 = 4$ 內切，且與直線 $L : x-2=0$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式。

Ans : $y^2 = -8(x+2)$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 M 為 $(-4, 0)$ ，半徑為 2。

假設與圓 C 內切，且與直線 L 相切之圓的圓心為 P ，半徑為 r 。



因為所求的圓與圓 C 內切，所以 $\overline{PM} = r - 2$ 。

又因為所求的圓與直線 L 相切，所以 $d(P, L) = r$ 。

令直線 $L' : x = 0$ (即 y 軸)。

因為 $d(P, L') = r - 2$ ，所以 $\overline{PM} = d(P, L')$ ，

即點 P 在以 M 為焦點，直線 L' 為準線的拋物線上。

且拋物線的頂點為 $(-2, 0)$ ，焦距為 2 。

故由拋物線的標準式，

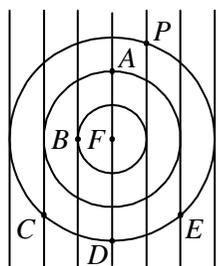
得其方程式為 $y^2 = 4 \cdot (-2) \cdot (x - (-2))$ ，

即 $y^2 = -8(x + 2)$ 。

重要精選考題

基礎題

1. 下圖是以 F 為圓心，半徑分別為 1, 2, 3 的一組同心圓，及一組相鄰兩線距離均為 1 的鉛直線，且其中一條鉛直線通過圓心 F 。現有一開口向右的拋物線 Γ ，其焦點為 F 且通過 P 點。
問： Γ 也通過下列哪些點？

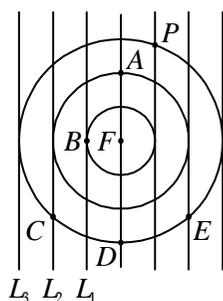


- (1) A (2) B (3) C (4) D (5) E .

Ans : (1)(2)

【詳解】

將鉛直線分別標示如下圖。



根據拋物線的定義，

點 P 到焦點 F 的距離與點 P 到準線的距離相等。

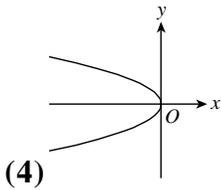
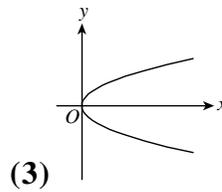
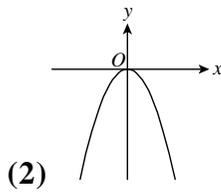
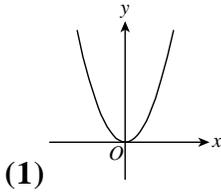
因為點 P 到焦點 F 的距離為 3，

所以點 P 到準線的距離也為 3，

因此準線為 L_2 .

觀察上圖，滿足拋物線定義的有 A ， B 和 P 三點 .
故正確的選項為(1)(2) .

2. 下列圖形中有一個是方程式 $y^2 + x = 0$ 的圖形，
選出正確的選項：



Ans : (4)

【詳解】

將方程式改寫成 $y^2 = -x$ ，可知拋物線的開口向左 .
故正確的選項為(4) .

3. 求滿足下列條件的拋物線方程式：

(1) 焦點 $F(2, -1)$ ，頂點 $V(2, 1)$.

(2) 頂點 $V(-1, 3)$ ，準線 $L : x = 3$.

Ans : (1) $(x-2)^2 = -8(y-1)$ ，(2) $(y-3)^2 = -16(x+1)$

【詳解】

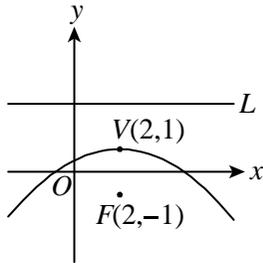
(1) 如下圖可知，拋物線開口向下，

$$c = -1 - 1 = -2 .$$

因此由拋物線的標準式，

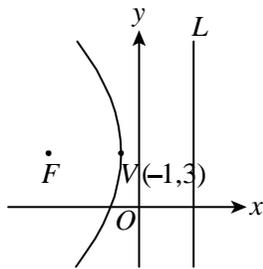
$$\text{得其方程式為 } (x-2)^2 = 4 \cdot (-2) \cdot (y-1),$$

$$\text{即}(x-2)^2 = -8(y-1).$$



- (2) 如下圖可知，拋物線開口向左，
 $c = -1 - 3 = -4$.

因此由拋物線的標準式，
 得其方程式為 $(y-3)^2 = 4 \cdot (-4) \cdot (x+1)$ ，
 即 $(y-3)^2 = -16(x+1)$.



4. 已知 $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = |y-6|$ 的圖形是一個拋物線，求此拋物線的正焦弦長 .

Ans : 14

【詳解】

由方程式 $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = |y-6|$ 可知：

此拋物線的焦點為 $F(-3, -1)$ ，準線為 $L: y=6$.

因為正焦弦長為焦點到準線距離長的 2 倍
 (即焦距長的 4 倍) ,

又點 $F(-3, -1)$ 到直線 $L: y=6$ 的距離為 7，
所以正焦弦長為 $7 \times 2 = 14$ 。

5. 求軸與 y 軸平行，且過 $(-1, 0)$ ， $(-9, 0)$ ， $(0, 9)$ 三點之拋物線的方程式及其焦點。

Ans：方程式 $y = x^2 + 10x + 9$ ，焦點 $(-5, -\frac{63}{4})$

【詳解】

因為拋物線的軸與 y 軸平行，
所以假設此拋物線的方程式為
 $y = Ax^2 + Bx + C$ 。

將 $(-1, 0)$ ， $(-9, 0)$ ， $(0, 9)$ 三點坐標代入

$$y = Ax^2 + Bx + C, \text{ 得 } \begin{cases} 0 = A - B + C \\ 0 = 81A - 9B + C \\ 9 = C \end{cases}$$

解得 $A = 1$ ， $B = 10$ ， $C = 9$ ，

故此拋物線的方程式為 $y = x^2 + 10x + 9$ 。

將 $y = x^2 + 10x + 9$ 配方改寫成

$$(x + 5)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (y + 16),$$

可得拋物線的頂點為 $(-5, -16)$ ， $c = \frac{1}{4}$ ，

其圖形開口向上，故其焦點為 $(-5, -16 + \frac{1}{4}) = (-5, -\frac{63}{4})$ 。

6. 已知拋物線 Γ 的對稱軸為 $x = -2$ ，且通過點 $(-1, 4)$ ， $(0, 10)$ ，
求 Γ 的方程式。

Ans： $(x + 2)^2 = \frac{1}{2}(y - 2)$

【詳解】

因為 Γ 的對稱軸為 $x = -2$,

所以可設其頂點為 $(-2, k)$,

Γ 的方程式為 $(x+2)^2 = 4c(y-k)$.

將 $(-1, 4)$, $(0, 10)$ 代入方程式, 得
$$\begin{cases} 1 = 4c(4-k) \\ 4 = 4c(10-k) \end{cases},$$

將兩式相除得 $\frac{1}{4} = \frac{4-k}{10-k}$, 解得 $k = 2$, 並得 $c = \frac{1}{8}$.

故 Γ 的方程式為 $(x+2)^2 = \frac{1}{2}(y-2)$.

7. 求兩拋物線 $y^2 + 2y + x - 1 = 0$ 與 $-y^2 + y + 2x - 2 = 0$ 的交點坐標.

Ans : $(1, 0)$ 或 $(2, -1)$

【詳解】

將兩方程式聯立為
$$\begin{cases} y^2 + 2y + x - 1 = 0 \\ -y^2 + y + 2x - 2 = 0 \end{cases},$$

並將兩式相加得 $3y + 3x - 3 = 0$, 即 $y = 1 - x$.

將 $x = 1 - y$ 代入 $y^2 + 2y + x - 1 = 0$,

整理得 $y^2 + y = 0$, 解得 $y = 0$ 或 $y = -1$,

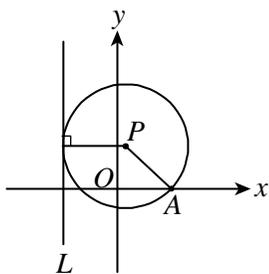
並得兩拋物線的交點為 $(1, 0)$ 或 $(2, -1)$.

8. 求通過點 $A(3, 0)$, 且與直線 $L: x = -3$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式.

Ans : $y^2 = 12x$

【詳解】

假設過點 A ，且與直線 L 相切之圓的圓心為 P ，半徑為 r 。



因為所求的圓與直線 L 相切，所以 $d(P, L) = r$ 。

又因為所求的圓通過點 A ，所以 $\overline{PA} = r$ 。

由 $d(P, L) = \overline{PA} = r$ ，得點 P 在以 A 為焦點，直線 L 為準線的拋物線上。

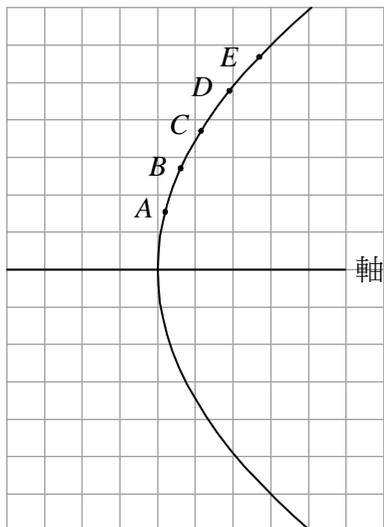
且此拋物線的中心為 $(0, 0)$ ，焦距為 3。

故由拋物線的標準式，得其方程式為

$$y^2 = 4 \cdot 3x, \text{ 即 } y^2 = 12x.$$

進階題

9. 下圖中，每一個小方格的邊長均為 1，圖中的曲線是拋物線 Γ 的一部分，且 A, B, C, D, E 為 Γ 上五點。問：哪些點與 Γ 的焦點之距離大於 5？

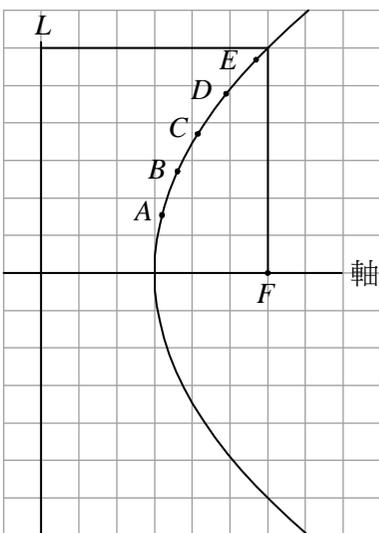


(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E .

Ans : (5)

【詳解】

由正焦弦的長恰為焦距的 4 倍，可畫出焦點 F ，並利用對稱的概念畫出準線 L ，如下圖所示：



因為拋物線上的點到焦點的距離等於該點到準線的距離，所以由上圖可知：僅 E 點到準線的距離大於 5。

故正確的選項為(5)。

10. 設 $A(1,0)$ 與 $B(b,0)$ 為坐標平面上兩點，其中 $b > 1$ 。若拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 上有一點 P 使得 $\triangle ABP$ 為正三角形，則 b 的值為何？

【92 學測】

Ans : 5

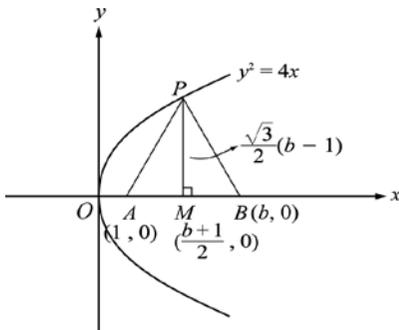
【詳解】

如圖，在第一、四象限上各有一點 P ，
可使 $\triangle ABP$ 為正三角形且兩點互相對稱於 x 軸，
又因 $\triangle ABP$ 是邊長為 $b-1$ 的正三角形，

所以 P 點的坐標為 $(\frac{b+1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}(b-1)}{2})$ ，

由於 P 點在 $\Gamma: y^2 = 4x$ 上，

代入得 $\frac{3}{4}(b-1)^2 = 4(\frac{b+1}{2})$ ，



展開化簡得 $3b^2 - 14b - 5 = 0$ ，

因此 $b = -\frac{1}{3}$ 或 5 ，然而 $b > 1$ ，所以 $b = 5$ 。

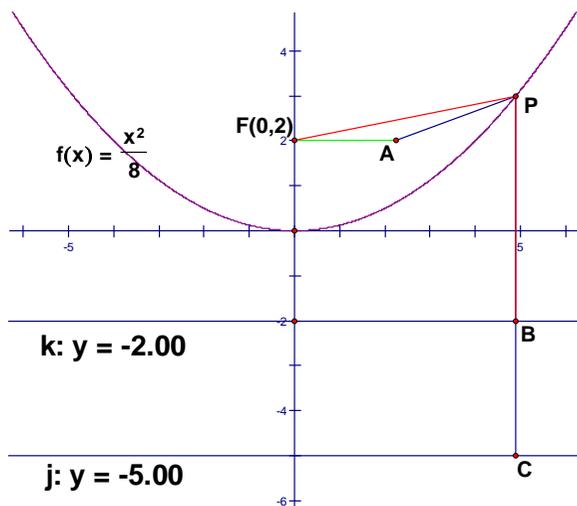
11. 坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4}, 2)$ 、直線 $L: y = -5$ 與拋物線 $\Gamma: x^2 = 8y$ ，

以 $d(P, L)$ 表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在 Γ 上變動，則

$|d(P, L) - \overline{AP}|$ 之最大值為何？【99 學測】

Ans : $\frac{21}{4}$

【詳解】



$\Gamma: x^2 = 8y$ 為拋物線，焦點 $F(0, 2)$ ，準線： $y = -2$ 。
如上圖， $\overline{PF} = \overline{PB}$ ， $\overline{BC} = 3$ 。

在 $\triangle PAF$ 中， $\overline{PF} - \overline{AP} \leq \overline{AF} = \frac{9}{4}$ ，

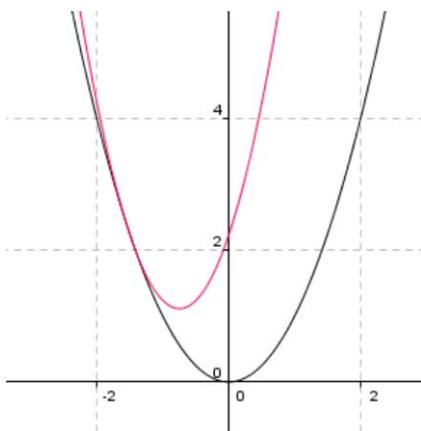
$$\begin{aligned} & |d(P, L) - \overline{AP}| \\ &= |\overline{PC} - \overline{AP}| \\ &= |3 + \overline{PB} - \overline{AP}| \\ &= |3 + \overline{PF} - \overline{AP}| \\ &\leq |3 + \frac{9}{4}| \\ &= \frac{21}{4}。 \end{aligned}$$

即 $|d(P, L) - \overline{AP}|$ 之最大值為 $\frac{21}{4}$ 。

12. 假設 Γ_1 為坐標平面上開口向上的拋物線，其對稱軸為 $x = -\frac{3}{4}$ 且焦距(焦點到頂點的距離)為 $\frac{1}{8}$ 。若 Γ_1 與另一拋物線 $\Gamma_2: y = x^2$ 恰交於一點，則 Γ_1 的頂點之 y 坐標為何? 【98 學測】

Ans : $\frac{9}{8}$

【詳解】



$$\Gamma_1 : \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}(y - k)$$

$$\Rightarrow y = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + k$$

$$2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + k = x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + \frac{9}{8} + k = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + k + \frac{9}{8} = 0 \text{ 恰有一實根,}$$

$$\Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times \left(k + \frac{9}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow k + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow k = \frac{9}{8}。$$

13. 已知坐標平面上圓 $O_1: (x-7)^2 + (y-1)^2 = 144$ 與

$O_2: (x+2)^2 + (y-13)^2 = 9$ 相切，且此兩圓均與直線 $L: x = -5$ 相

切。若 Γ 為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標為何？ **【97 學測】**

$$\text{Ans : } \left(-\frac{1}{5}, \frac{53}{5} \right)$$

【詳解】

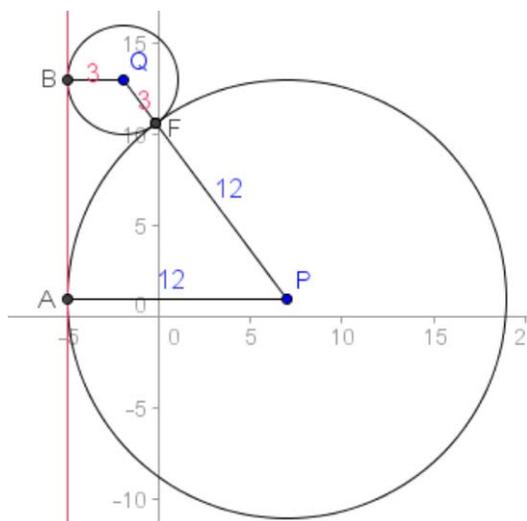
如上圖， O_1 的圓心 $P(7, 1)$ ，半徑 12，

O_2 的圓心 $Q(-2, 13)$ ，半徑 5，

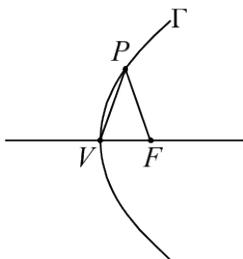
$\overline{PA} = 12$ ， $\overline{QB} = 5$ ，故交點 F 在連心線 \overline{PQ} 上，

$$\text{且 } \overline{PF} = \frac{4}{5} \overline{PQ} = \frac{4}{5}(-9, 12)，$$

$$\text{故 } F = \left(7 - \frac{36}{5}, 1 + \frac{48}{5} \right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{53}{5} \right)。$$



14. 如下圖，拋物線 Γ 的頂點為 V ，焦點為 F ，點 P 在 Γ 上，且 $\overline{PV} = \overline{PF}$ ， $\overline{VF} = 4$ ，求 Γ 的正焦弦長及 \overline{PF} 的長。



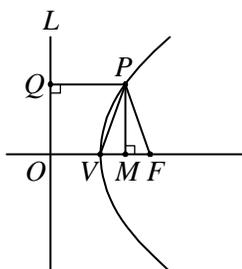
Ans : 正焦弦長 16, \overline{PF} 長 6

【詳解】

因為 Γ 的正焦弦長為焦距的 4 倍，且焦距 $\overline{VF} = 4$ ，
所以 Γ 的正焦弦長為 $4 \times 4 = 16$ 。

令 M 為 \overline{VF} 的中點， L 為 Γ 的準線，

如下圖所示，並得 $\overline{VM} = 2$ 。



因為 $\triangle PFV$ 為等腰三角形，得 $\overline{PM} \perp \overline{VF}$ ，

並得 $PQOM$ 是一個矩形，

$$\overline{PQ} = \overline{OM} = \overline{OV} + \overline{VM} = 4 + 2 = 6 .$$

又由拋物線的定義得 $\overline{PF} = \overline{PQ} = 6$ ，

故 \overline{PF} 的長為6。

15. 在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 於 P, Q 兩

點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF} = 3\overline{QF}$ ，則 P 點的坐標為何？

【94 學測】

$$\text{Ans : } \left(\frac{3}{2}, \sqrt{6} \right)$$

【詳解】

令 $P(t^2, 2t)$ ， $Q(x, y)$ ，

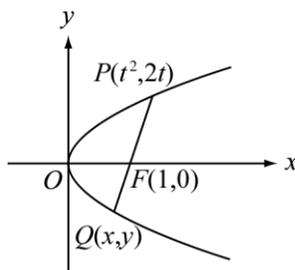
利用分點公式，

$$1 = \frac{3x + 2t^2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{3}(5 - 2t^2),$$

$$0 = \frac{3y + 4t}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}t,$$

$$Q\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^2, -\frac{4}{3}t\right) \text{ 代入 } y^2 = 4x,$$

$$\text{得 } \left(-\frac{4}{3}t\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^2\right),$$



$$t^2 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \therefore P \text{ 點之 } x \text{ 坐標為 } \frac{3}{2} .$$

16. 在拋物線 $y^2 = 8x$ 上找一點 P ，使得 P 到焦點 F 與定點 $A(5,2)$ 的距離和 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 最小，求此時 P 點的坐標。

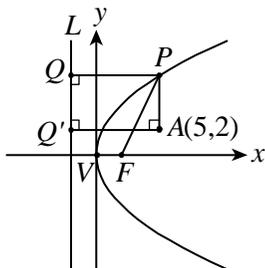
Ans : $(\frac{1}{2}, 2)$

【詳解】

由拋物線的標準式得知，

拋物線的開口向右，頂點 $V(0, 0)$ ，焦距為 2。

因此，焦點的坐標為 $F(2, 0)$ ，準線 $L: x = -2$ 。



根據拋物線的定義，得知 $\overline{PF} = d(P, L) = \overline{PQ}$ ，

因此，點 P 到焦點 F 與定點 $A(5,2)$ 的距離和

$$\overline{PA} + \overline{PF} = \overline{PA} + \overline{PQ} .$$

觀察圖形得知：當直線 PA 垂直 L 時，

$\overline{PA} + \overline{PF}$ 有最短距離 $\overline{AQ'}$ 。

因為 $\overline{AQ'}$ 所在的直線方程式為 $y = 2$ ，

所以 P 點為 $y = 2$ 與拋物線的交點，

$$\text{將兩方程式聯立得 } \begin{cases} y = 2 \\ y^2 = 8x \end{cases},$$

即 $8x = 4$ ，解得 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = 2$ 。

故 P 點的坐標為 $(\frac{1}{2}, 2)$.

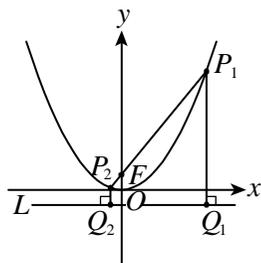
17. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 為拋物線 $x^2 = 4y$ 上兩點 . 若 $\overline{P_1P_2}$ 通過拋物線的焦點且 $\overline{P_1P_2} = 10$, 求 $y_1 + y_2$ 的值 .

Ans : 8

【詳解】

由拋物線的標準式，可得拋物線的開口向上，頂點 $V(0, 0)$ ，焦距為 1 .

因此，焦點的坐標為 $(0, 1)$ ，準線 $L : y = -1$.



由拋物線的定義，得 $\overline{P_1F} = \overline{P_1Q_1}$ ， $\overline{P_2F} = \overline{P_2Q_2}$ ，

又 $\overline{P_1Q_1} = y_1 - (-1) = y_1 + 1$ ，

$\overline{P_2Q_2} = y_2 - (-1) = y_2 + 1$.

由題意可知 $\overline{P_1P_2} = 10$ ，即 $\overline{P_1F} + \overline{P_2F} = 10$ ，

故 $(y_1 + 1) + (y_2 + 1) = 10$ ，

解得 $y_1 + y_2 = 8$.